Differentiaaliyhtälöt © Pekka Alestalo 2013

Tässä monisteessa käydään läpi tavallisiin differentiaaliyhtälöihin liittyviä peruskäsitteitä ja ratkaisuperiaatteita. Luennolla lasketaan esimerkkitehtäviä ja oppikirjoista niitä löytyy lisää.

4 Korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä esiintyy varsinkin mekaniikassa liikeyhtälöiden kohdalla ja neljännen kertaluvun yhtälöitä esimerkiksi lujuusopissa palkkien taipumiseen liittyvissä tehtävissä. Muiden kertalukujen differentiaaliyhtälöitä tulee sovelluksissa vastaan selvästi harvemmin, mutta matemaattisessa mielessä niiden käsittely ei juurikaan poikkea toisen kertaluvun tapauksesta. Lisäksi korkeamman kertaluvun yhtälöillä on suora yhteys 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmiin, kuten myöhemmin nähdään.

Seuraavassa esitellään yhtälöihin liittyviä käsitteitä yleisessä lineaarisessa tapauksessa, mutta käytännön esimerkeissä keskitytään toisen kertaluvun vakiokertoimiseen tapaukseen, joka on myös sovellusten kannalta kaikkein tärkein.

4.1 Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Kertalukua n oleva lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x),$$

missä funktiot $a_i(x)$ ja $r(x)$ tunnetaan. Yhtälö on **homogeeninen**, jos $r(x) \equiv 0$, muuten **epähomogeeninen**. Se on **vakiokertoiminen**, jos jokainen $a_i(x) =$ vakio; sen sijaan funktion $r(x)$ ei tarvitse olla vakio.

Yhtälöä kutsutaan lineaariseksi, koska homogeenisen yhtälön ratkaisujen $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ lineaarikombinaatio $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ on edelleen ratkaisu, kun A, B ovat vakioita. Tämä ominaisuus yleistyy myös useamman kuin kahden ratkaisun lineaarikombinaatioille.

Toisin kuin 1. kertaluvun yhtälöiden tapauksessa, ei kertaluvusta kaksi eteenpäin ole mitään helppoa ja käytännöllistä tapaa johtaa yhtälön yleistä ratkaisua. Sen vuoksi tutkimme asiaa aloittamalla homogeenisesta tapauksesta.

4.2 Lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö

4.2.1 Kertaluku kaksi

Päästäksemme jollakin tavalla alkuun, yritämme ratkaista vakiokertoimisen 2. kertaluvun yhtälön

$$y'' + py' + qy = 0$$

kokeilemalla integroivan tekijän käyttöä samaan tapaan kuin 1. kertaluvun yhtälöiden tapauksessa. Tässä siis $p, q \in \mathbf{R}$ ovat vakioita.

Ensimmäisen kertaluvun yhtälöille integroiva tekijä on muotoa $e^{\lambda x}$ sopivalla kertoimella λ, joten kokeillaan tällaista kerrointa. Näin saadaan

$$e^{\lambda x}y''(x) + pe^{\lambda x}y'(x) + qe^{\lambda x}y(x) = 0. \tag{1}$$

Jotta tulos voitaisiin integroida kaksi kertaa, sitä täytyy verrata tulon toisen derivaatan lausekkeeseen

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\lambda x}y(x)) = e^{\lambda x}y''(x) + 2\lambda e^{\lambda x}y'(x) + \lambda^2 e^{\lambda x}y(x).$$

Yhtälön (1) vasen puoli voidaan siis kirjoittaa 2. kertaluvun derivaataksi ainoastaan silloin, kun $p = 2\lambda$ ja $q = \lambda^2$, ts. $q = (p/2)^2$. Tämän tapauksen pystymme kuitenkin ratkaisemaan täydellisesti:

$$\begin{aligned}
y''(x) + 2\lambda y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{\lambda x}y''(x) + 2\lambda e^{\lambda x}y'(x) + \lambda^2 e^{\lambda x}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}(y(x)e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow y(x)e^{\lambda x} = C_1 + C_2 x \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 x e^{-\lambda x},
\end{aligned}$$

jossa $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ ovat vakioita. Olemme siis johtaneet seuraavan tuloksen.

Lause 4.1 *Jos $\lambda \in \mathbf{R}$, niin differentiaaliyhtälön*

$$y'' + 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$$

kaikki ratkaisut (= yleinen ratkaisu) ovat muotoa

$$y(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 x e^{-\lambda x},$$

jossa $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ ovat vakioita.

Kyseessä olevan differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siis kahden "erilaisen" ratkaisun $y_1(x) = e^{-\lambda x}$ ja $y_2(x) = xe^{-\lambda x}$ lineaarikombinaatio yleisillä kertoimilla. Osoittautuu, että vastaava ominaisuus pätee yleisemminkin, mutta ennen ko. tuloksen muotoilua tutkitaan tarkemmin ratkaisujen "erilaisuutta". Yllä olevassa tuloksessa $y_2(x)/y_1(x) = x$ ei ole vakio, ts. $y_2 \neq \text{vakio} \cdot y_1$. Tämä ominaisuus vastaa kahden vektorin lineaarista riippumattomutta, joten yleisemmin funktioita $y_1, y_2 \colon I \to \mathbf{R}$ kutsutaan lineaarisesti riippumattomiksi (LRT) välillä I, jos $y_2(x)/y_1(x)$ ei ole (sama) vakio välillä I. Määritelmää voidaan muokata myös täsmällisempään muotoon

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = 0,$$

josta se yleistyy myös useamman funktion tapaukseen (myöhemmin).

Esimerkki 4.2 Osoita, että funktiot $\sin x,\ \cos x$ ovat LRT reaaliakselilla.

Toisen kertaluvun lineaaristen homogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen perustuu seuraavaan tulokseen.

Lause 4.3 *Olkoot $I \subset \mathbf{R}$ avoin väli ja $p, q\colon I \to \mathbf{R}$ jatkuvia funktioita. Tällöin (i) differentiaaliyhtälöllä*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

on LRT ratkaisut $y_1, y_2\colon I \to \mathbf{R}$,
(ii) ja sen yleinen ratkaisu saadaan minkä tahansa LRT ratkaisuparin y_1, y_2 avulla muodossa

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),\ \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Lisäksi
(iii) ratkaisu on yksikäsitteinen, jos kiinnitetään alkuehdot $y(x_0) = \alpha,\ y'(x_0) = \beta$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$.

Lauseen todistus yleisessä tapauksessa on hankalahko ja sivuutetaan. Palaamme kuitenkin kohtaan (iii) alempana esimerkin jälkeen.

Lauseessa esiintyviä LRT ratkaisuja y_1, y_2 kutsutaan differentiaaliyhtälön perusratkaisuiksi, jotka yhdessä muodostavat ratkaisujen **perusjärjestelmän**.

Perusjärjestelmä ei ole yksikäsitteinen, vaan siinä esiintyvät funktiot voidaan valita monilla eri tavoilla.

Esimerkki 4.4 Differentiaaliyhtälön $y'' - y = 0$ ratkaisuja[1] ovat ainakin $y_1(x) = e^{-x}$ ja $y_2(x) = e^x$. Ne muodostavat perusjärjestelmän, koska $y_2(x)/y_1(x) = e^{2x}$ ei ole vakio. Yleinen ratkaisu on siis muotoa

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x,\ \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Toisaalta myös hyperboliset funktiot $\cosh x$ ja $\sinh x$ toteuttavat yhtälön, eikä niiden suhde $\sinh x/\cosh x = \tanh x$ ole vakio. Yleinen ratkaisu voidaan siis antaa myös vaihtoehtoisessa muodossa

$$y(x) = A\cosh x + B\sinh x,\ \ A, B \in \mathbf{R}.$$

Kerrointen C_1, C_2 ja A, B yhteys selviää, kun hyperboliset funktiot esitetään eksponenttifunktioiden avulla.

[1] Palaamme hieman myöhemmin siihen, miten nämä löydetään systemaattisella tavalla.

Lauseen 4.3 kohdan (iii) ominaisuus liittyy kiinteästi perusratkaisujen lineaariseen riippumattomuuteen. Jos nimittäin yleisen ratkaisun lausekkeeseen sijoitetaan annetut alkuehdot, päädytään yhtälöpariin

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = \alpha \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = \beta, \end{cases}$$

jossa tuntemattomia ovat kertoimet C_1, C_2. Yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on

$$W(y_1, y_2)(x_0) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0),$$

joten kertoimet määräytyvät yksikäsitteisesti täsmälleen silloin, kun

$$W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0.$$

Suoraan yhtälön perusteella[2] voidaan osoittaa, että ratkaisuille y_1, y_2 joko $W(y_1, y_2)(x)$ on identtisesti nolla tai $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla x. Toisaalta

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1(x)^2} = \frac{W(y_1, y_2)(x)}{y_1(x)^2},$$

joten vakioiden yksikäsitteisyys on yhtäpitävää LRT-ehdon "y_2/y_1 ei vakio" kanssa.

Determinanttia $W(y_1, y_2)(x)$ kutsutaan funktioiden y_1, y_2 Wronskin determinantiksi, ja sen avulla lineaarista riippumattomuutta voidaan helposti tutkia myös useamman kuin kahden funktion tapauksessa.

Alkuehtojen lisäksi differentiaaliyhtälöihin voi liittyä **reunaehtoja**, jotka ovat esimerkiksi muotoa $y(x_1) = \beta_1,\ y(x_2) = \beta_2$. Tällöin ratkaisu ei aina ole yksikäsitteinen tai niitä ei ole lainkaan.

Esimerkki 4.5 Reuna-arvotehtävällä $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$, ei ole ratkaisua.

4.2.2 Kertaluku $n > 2$

Tarkastellaan yleistä homogeenista n:nnen kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{2}$$

jossa kerroinfunktiot $a_i(x)$ ovat jatkuvia jollakin välillä I. Sen ratkaisujen erilaisuutta ei voida enää tutkia yksinkertaisesti funktioiden suhteiden avulla, vaan on käytettävä yleistä lineaarisen riippumattomuuden käsitettä.

[2]Harjoitustehtävä: Osoita, että $W' = -p(x)W$, joten $W(x) = Ce^{-P(x)}$

Määritelmä 4.6 Välillä $I \subset \mathbf{R}$ määritellyt funktiot $y_1, \ldots, y_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia (LRT), jos pätee:

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Esimerkki 4.7 Osoita, että polynomit $1, x, x^2, \ldots, x^n$ ovat LRT reaaliakselilla.

Differentiaaliyhtälön (2) yleinen ratkaisu saadaan seuraavalla tavalla.

(i) Jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön ratkaisuja, niin myös $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ on ratkaisu, kun C_1, C_2 ovat vakioita. Sama yleistyy myös useammalle ratkaisulle, eli ratkaisujen lineaarikombinaatiot ovat ratkaisuja.

(ii) Yhtälöllä on välillä I määritellyt **perusratkaisut** $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, joilla on se ominaisuus, että kaikki muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

kun $C_1, \ldots, C_n$ ovat vakioita. Sanotaan: $y_1, \ldots, y_n$ muodostavat perusjärjestelmän.

(iii) Jollakin tavalla löydetyt ratkaisut $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ muodostavat perusjärjestelmän, jos ne ovat lineaarisesti riippumattomia välillä I.

(iv) Ratkaisusta tulee yksikäsitteinen, jos vaaditaan **alkuehdot** $y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$.

(v) Käytännössä lineaarinen riippumattomuus on yhtäpitävää sen kanssa, että funktioiden Wronskin determinantti $W(x) \neq 0$ jollakin x. Funktio $W(x)$ muodostetaan laskemalla determinantti $n \times n$-matriisista, jonka i:nnellä rivillä ovat luvut $y_1^{(i)}(x), \ldots, y_n^{(i)}(x)$, $0 \leq i \leq n-1$. Huom: $y^{(0)} = y$.

4.3 Vakiokertoiminen erikoistapaus

Vakiokertoimisessa toisen kertaluvun yhtälössä $y'' + py' + qy = 0$ luvut $p, q \in \mathbf{R}$ ovat vakioita. Yhtälön yleiseen ratkaisuun tarvittavat perusratkaisut saadaan sijoittamalla yhtälöön yrite $y(x) = e^{\lambda x}$, joka johtaa ns. **karakteristiseen yhtälöön**

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Sen juurten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ avulla perusjärjestelmä saadaan seuraavalla tavalla:

(i) Jos juuret ovat erisuuret ja reaaliset, niin
$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

(ii) Jos kyseessä on (reaalinen) kaksoisjuuri $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, niin
$y_1(x) = e^{\lambda x}$ ja $y_2(x) = xe^{\lambda x}$.

(iii) Jos juuret ovat imaginaarisia ja muotoa $\lambda = a \pm bi$, niin
$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$ ja $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$.

4.4 Eulerin lineaarinen differentiaaliyhtälö

Toinen käytännön sovelluksissa esiintyvä lineaarinen yhtälötyyppi on

$$x^2y'' + axy' + by = 0,$$

jossa $a, b \in \mathbf{R}$ ovat vakioita. Sitä kutsutaan Eulerin lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi, ja sen perusratkaisut saadaan muotoa $y(x) = x^r$ olevaa yritettä käyttämällä. Yritteen sijoittaminen johtaa yhtälöön

$$r^2 + (a-1)r + b = 0,$$

jonka juurten avulla Eulerin differentiaaliyhtälön perusjärjestelmä saadaan seuraavalla tavalla:

(i) Jos juuret ovat erisuuret ja reaaliset, niin
$y_1(x) = |x|^{r_1}$ ja $y_2(x) = |x|^{r_2}$.

(ii) Jos kyseessä on (reaalinen) kaksoisjuuri $r = r_1 = r_2$, niin
$y_1(x) = |x|^r$ ja $y_2(x) = |x|^r \ln|x|$.

(iii) Jos juuret ovat imaginaarisia ja muotoa $r = \alpha \pm \beta i$, niin
$y_1(x) = |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|)$ ja $y_2(x) = |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|)$.

Itseisarvojen tarpeellisuus riippuu potensseista r ja α sekä siitä, tutkitaanko ratkaisuja alueessa $x > 0$ vai $x < 0$.

4.5 Epähomogeeninen DY

Epähomogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x),$$

missä y_1 ja y_2 ovat vastaavan homogeenisen yhtälön perusratkaisut ja y_0 on jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.

Yksittäisratkaisuksi kelpaa siis mikä tahansa yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ toteuttava funktio $y_0(x)$. Jos p, q ovat vakioita, niin yksittäisratkaisu löydetään käytännössä **yritteellä**, joka on muotoa "$r(x)$ yleisillä kertoimilla" tai joskus hieman hankalampi. Yhtälöön sijoittamalla saadaan selville nämä kertoimet, mikäli yrite oli oikean tyyppinen. Joissakin erikoistapauksissa yritteeseen täytyy lisätä ylimääräisiä x-kertoimia.

Vastaava tulos on voimassa myös korkeamman kertaluvun yhtälöille, mutta emme käsittele niitä tällä kurssilla.

Seuraavassa taulukossa on annettu yritteen yleinen muoto vakiokertoimisille toisen kertaluvun yhtälöille, kun $r(x)$ on jokin alkeisfunktio. Jos $r(x)$ koostuu useista eri tyyppisistä osista, niin yritteeseen täytyy ottaa mukaan kaikkia eri osia vastaavat termit.

$r(x)$ sisältää	yritteen muoto on
n-asteisen polynomin	$A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$ ($+A_{n+1}x^{n+1}$, jos $q = 0$)
$\sin kx,\ \cos kx$	$A \cos kx + B \sin kx$
$e^{cx} \sin kx,\ e^{cx} \cos kx$	$Ae^{cx} \cos kx + Be^{cx} \sin kx$
e^{kx}	Ae^{kx}
e^{kx}	Axe^{kx}, jos k on karakteristisen yhtälön juuri
e^{kx}	$Ax^2 e^{kx}$, jos k on karakteristisen yhtälön kaksoisjuuri

Muistisääntö: ylimääräisiä x-kertoimia lisätään niin paljon, että yrite antaa ratkaisun.

4.6 Värähtelyilmiöt

- Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä, joka on muotoa $y'' = f(y)$. Tässä f on jokin funktio, joka esimerkiksi liikeyhtälöissä (voima $= F = ma = my''(t)$) on muotoa $f(y) = F(y)/m$.

- Systeemin **tasapainotiloja** vastaa erikoisratkaisu $y(t) \equiv y_0$, missä y_0 on funktion f nollakohta.

- Jos $f(0) = 0$ (eli tasapainossa $y(t) \equiv 0$), niin alkuperäinen DY voidaan **linearisoida** korvaamalla lauseke $f(y)$ sen sarjakehitelmän lineaarisella termillä:
$$f(y) = f(0) + f'(0)y + \frac{f''(0)}{2!}y^2 + \cdots \approx f'(0)y,$$
jos $|y|$ on pieni. Tutkimalla linearisoitua yhtälöä $y'' = f'(0)y$ saadaan tietoa systeemin käyttäytymisestä tasapainotilan $y = 0$ lähellä.

- Jos $f'(0) = -\omega^2 < 0$, niin tasapainotilan lähellä ratkaisut ovat likimäärin muotoa $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, joka esittää värähdysliikettä kulmataajuudella ω. Sanotaan: $\omega =$ **pienten värähtelyjen kulmataajuus**.

- Yleisessä tapauksessa linearisointi täytyy tehdä tasapainotilan y_0 suhteen, jolloin värähtelyehto tulee muotoon $f'(y_0) = -\omega^2 < 0$.

5 Differentiaaliyhtälöryhmät

Differentiaaliyhtälöryhmässä esiintyy n kappaletta tuntemattomia funktioita $y_1, \ldots, y_n$, joiden välillä on n kappaletta differentiaaliyhtälöitä. Tapauksessa $n = 2$ differentiaaliyhtälöryhmä on esim. muotoa
$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases}$$
jonka kertaluku on yksi. Differentiaaliyhtälöryhmiä syntyy tilanteissa, joissa systeemin osat vaikuttavat toisiinsa.

- Käytännössä ainoa tapaus, johon ei tarvita numeerisia menetelmiä, on lineaarinen vakiokertoiminen DY-ryhmä, jossa $f_i(x, y_1, y_2) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + r_i(x)$.

- Alkeellisin ratkaisumenetelmä on ns. **eliminointimenetelmä**, jonka avulla esimerkiksi lineaarisen vakiokertoimisen DY-ryhmän
$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

yleinen ratkaisu saadaan seuraavien vaiheiden kautta:

(i) Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä y_2 funktioiden y_1', y_1 ja muuttujan x avulla.

(ii) Derivoidaan tätä lauseketta, jolloin saadaan y_2' funktioiden y_1'', y_1' ja muuttujan x avulla.

(iii) Sijoitetaan y_2' ja y_2 jälkimmäiseen yhtälöön, jolloin siihen jää ainoastaan y_1 ja sen derivaattoja.

(iv) Ratkaistaan tästä DY:stä funktio y_1.

(v) Ratkaistaan lopuksi y_2 käyttämällä kohdassa (i) saatua lauseketta.

- Tehokkaammat menetelmät perustuvat DY-ryhmän kerroinmatriisin ominaisarvoihin ja -vektoreihin. (KP3-II)

- DY-ryhmään voi myös liittyä **alkuehtoja**, jotka ovat muotoa $y_1(x_0) = \alpha_1, \ldots, y_n(x_0) = \alpha_n$. Kun nämä otetaan huomioon yleisen ratkaisun lausekkeessa, saadaan yleensä yksikäsitteinen ratkaisu.