Kurssitentin ratkaisut/vastaukset 18.10.2023

Tehtävä 1

> $sum\left(\frac{3^k}{5^{k+1}}, k = 0\,..\text{infinity}\right)$

$$\frac{1}{2} \tag{1.1}$$

> $a := k \rightarrow \frac{3 \cdot x^k}{k \cdot 4^k}$

$$a := k \mapsto \frac{3 \cdot x^k}{k \cdot 4^k} \tag{1.2}$$

> $limit\left(\text{abs}\left(\frac{a(k+1)}{a(k)}\right), k = \text{infinity}\right)$

$$\frac{|x|}{4} \tag{1.3}$$

Suhdetestin perusteella sarja suppenee, kun $|x| < 4$ ja hajaantuu, kun $|x| > 4$, joten $R = 4$. Arvolla $x = 4$ saadaan hajaantuva harmoninen sarja ja arvolla $x = -4$ suppeneva vuorotteva harmoninen, mutta näitä ei tarvinnut tutkia.
Toinen tapa: Sijoittamalla $x = 4$ saadaan hajaantuva harmoninen, joten kysytty $R \leq 4$. Jos $|x| < 4$, niin |sarjalla| on suppeneva geometrinen majorantti (jätetään nimittäjän kerroin k pois) suhdeluvulla $\frac{|x|}{4} < 1$, joten alkuperäinen sarja suppenee. Tästä seuraa, että $R = 4$.

Tehtävä 2

> $taylor(x \cdot \exp(2 \cdot x), x = 0, 4)$

$$x + 2x^2 + 2x^3 + O(x^4) \tag{2.1}$$

Vastaus on siis

> $convert(\%, polynom)$

$$2x^3 + 2x^2 + x \tag{2.2}$$

> $limit\left(\frac{\sin(3 \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x)}{\sin(x) \cdot \cos(2 \cdot x)}, x = 0\right)$

$$3 \tag{2.3}$$

L'Hospitalin välivaiheissa tarvitaan

> $diff(\sin(3 \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x), x)$

$$3\cos(3x)\cos(4x) - 4\sin(3x)\sin(4x) \tag{2.4}$$

ja

> $diff(\sin(x) \cdot \cos(2 \cdot x), x)$

$$\cos(2x)\cos(x) - 2\sin(x)\sin(2x) \tag{2.5}$$

mutta on helpompi käyttää raja-arvon jakamista kahteen osaan

> $limit\left(\frac{\cos(4\cdot x)}{\cos(2\cdot x)}, x=0\right)$

$$1 \tag{2.6}$$

ja laskea erikseen hankalampi

> $limit\left(\frac{\sin(3\cdot x)}{\sin(x)}, x=0\right)$

$$3 \tag{2.7}$$

joko L'Hospitalilla tai palauttamalla (temppuillaan toisensa kumoavat ylimääräiset x-termit) tunnettuun raja-arvoon

> $limit\left(\frac{\sin(x)}{x}, x=0\right)$

$$1 \tag{2.8}$$

Tehtävä 3

> $int\left(x\cdot(1+x^2)^{23}, x=0..1\right)$

$$\frac{5592405}{16} \tag{3.1}$$

Vastauksessa voi esiintyä 2^{24} tms. ilman vähennystä. Voi käyttää sijoitusmenetelmää tai päätellä integraalifunktion:

> $int\left(x\cdot(1+x^2)^{23}, x\right)$

$$\frac{(x^2+1)^{24}}{48} \tag{3.2}$$

> $int(x\cdot\cos(2\cdot x), x=0..2\cdot\mathrm{Pi})$

$$0 \tag{3.3}$$

osittaisintegroimalla.

Tehtävä 4

> $int\left(\frac{1}{\mathrm{sqrt}(x)\cdot(1+\mathrm{sqrt}(x))}, x=1..4\right)$

$$-2\ln(2)+2\ln(3) \tag{4.1}$$

> $int\left(\frac{1}{\mathrm{sqrt}(x)\cdot(1+\mathrm{sqrt}(x))}, x=1..\mathrm{infinity}\right)$

$$\infty \tag{4.2}$$

Tämän voi päätellä joko edellisestä kohdasta korvaamalla $4 \to R \to \infty$ tai käyttämällä integraalifunktiota

> $int\left(\frac{1}{\mathrm{sqrt}(x)\cdot(1+\mathrm{sqrt}(x))}, x\right)$

$$2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \tag{4.3}$$

tai toteamalla, että suurilla x on voimassa $\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right) \approx x$, ja funktion

$\frac{1}{x}$ epäoleellinen

integraali hajaantuu äärettömyydessä.

Tehtävä 5

> *restart*

> $dsolve(\{y'(x) = -k \cdot y(x), y(0) = y[0]\})$

$$y(x) = y_0 \, e^{-k x} \tag{5.1}$$

> $k := solve\left(y[0] \cdot \exp(-k) = \frac{y[0]}{3}, k\right)$

$$k := \ln(3) \tag{5.2}$$

> $solve\left(y[0] \cdot \exp(-k \cdot X) = \frac{y[0]}{2}, X\right)$

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \tag{5.3}$$

Tehtävä 6

> $dsolve(y''(x) + 4 \cdot y'(x) + 3 \cdot y(x) = 0)$

$$y(x) = \_C1 \, e^{-x} + \_C2 \, e^{-3 x} \tag{6.1}$$

> $dsolve(\{y''(x) + 4 \cdot y'(x) + 3 \cdot y(x), y(0) = 0, y'(0) = 10\})$

$$y(x) = 5 \, e^{-x} - 5 \, e^{-3 x} \tag{6.2}$$

>