

MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 19.10.2023 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen kurssille I/2023 osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Puolipallon

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$$

tiheys ρ riippuu pallokoordinaatiston muuttujista kaavan $\rho(r, \varphi, \theta) = (8 + 4 \cos \varphi)r$ mukaisesti (sopivissa yksiköissä). Laske puolipallon massa

$$m = \iiint_K \rho dV.$$

2. a) Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$ viivaintegraali pisteestä $(4, 0)$ pisteeseen $(0, 4)$ origokeskisen ympyrän (lyhyempää) kaarta pitkin. (4 p.)

b) Onko a-kohdan vektorikentällä potentiaalia? (2 p.)

3. Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ kenttäviivojen yhtälöt ja hahmottele kuvioon ainakin kaksi eri kenttäviivaa.

4. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 - x)\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ lähteisyys $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja pyörteisyys $\nabla \times \mathbf{F}$ pisteessä $(1, 2, 3)$.

5. a) Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

vuon puolipallon pinnan $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$ läpi. Voit käyttää joko vuon määritelmää tai Gaussin lausetta, kun pinta P on ensin täydennetty umpinaiseksi pinnaksi niin, että $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ täydennetyllä osalla. (Tämä ehto täytyy myös todentaa laskulla, jos käytät Gaussin lausetta.) (5 p.)

b) Vaikuttaako vuon suunnan valinta lopputulokseen? (1 p.)

6. Eräässä tosi-TV-kilpailussa täytyy kiivetä mahdollisimman korkealle alla olevan kuvan muotoista pintaa pitkin. Pinnalla on (sopivissa yksiköissä) parametrisointi¹

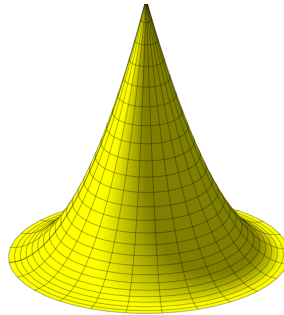
$$\mathbf{r}(u, v) = ((2 - u) \cos v, (2 - u) \sin v, u^2),$$

kun parametrialueena on neliö $\Omega = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

a) Muodosta pinnan normaalivektori parametrien arvoja $u = 1$ ja $v = \pi$ vastaavassa pinnan pisteessä. (3 p.)

b) Määritä a-kohdan normaalin avulla pinta-alan paikallinen suurennussuhde ja pinnan kaltevuuskulmalle α lauseke $\cos \alpha$ kyseessä olevassa pisteessä. (3 p.)

c) Kaltevuuskulman α likiarvo on 63° . Pystyisitkö kiipeämään tälle korkeudelle, jos pinnan muoto on sama ja huippu 10 metrin korkeudessa? (0 p.)



Eräitä kaavoja:

- $\frac{dx}{F_1(x, y)} = \frac{dy}{F_2(x, y)}$
- $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \iff x = a \cos t, y = b \sin t$
- $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f, \nabla \times \nabla f = \bar{0}, \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}), \nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$
- Tällä kurssilla \mathbf{n} = yksikkönormaali.
- $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$
- $\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$
- $(r, \varphi, \theta): x = r \sin(\varphi) \cos(\theta), y = r \sin(\varphi) \sin(\theta), z = r \cos(\varphi), dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta$
- $(r_\perp, \theta, z): x = r_\perp \cos(\theta), y = r_\perp \sin(\theta), z = z, dV = r_\perp dr_\perp d\theta dz$
- $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2, \sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2, \sin 0 = \cos(\pi/2) = 0,$
 $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1, \sin \pi = 0, \cos \pi = -1, \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin(2x) = 2 \sin x \cos x,$
 $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentint voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

¹Tämä saadaan aikaan kiertämällä paraabelin kaarta kuten laskuharjoitusten torus-tehtävässä ympyrää.