Taylorin sarja: recap

Jos meillä on yhden muuttujan funktio $f(x)$

on sillä arvo $f(x_0)$ pisteessä x_0. Tässä pisteessä sen derivaatta on $f'(x_0)$ ja voimme aproksimoida funktiota x_0:in lähellä suoralla, jonka kulmakerroin on $f'(x_0)$. Taylorin sarjan ensimmäiset termit ovat

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)$$

Jos olemme pisteen x_0 lähellä, viimeinen termi $\mathcal{O}((x-x_0)^2)$ on korkeampaa kertalukua poikkeamassa $(x-x_0)$ ja siksi pieni. Approksimaatiota voi parantaa lisäämällä neliöllisen, kuutiollisen jne. termin. Saadaan Taylorin sarja

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x-x_0)^3 \dots \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} (x-x_0)^n \dots$$

Yleensä pari ensimmäistä termiä riittää ja jos ei riitä, sarjaa ei luultavasti kannata käyttää.

Useampia muuttujia? Funktio $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ voidaan kehittää sarjaksi pisteen $(a_1, a_2 \dots a_n)$ ympärillä. Ensimmäiseen kertalukuun Taylorin sarja on

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) \approx f(a_1, a_2 \dots a_n) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}=(a_1 \dots a_n)} (x_i - a_i)$$