

# Harjoitus 6: Symbolinen laskenta II (Mathematica)

SCI-C0200 Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio 2024



# Harjoituksen aiheita

- Differentiaaliyhtälöiden ja differentiaaliyhtälösystemien analysointi Mathematicalla
- Visualisointi liukusäätimiä käyttäen

## Osaamistavoitteet

- Osaat integroida symbolisesti Mathematicalla
- Osaat ratkaista differentiaaliyhtälöitä symbolisesti Mathematicaa käyttäen
- Osaat perustella Mathematican hyötyjä suhteessa Matlabiin

## Derivointi ja integrointi

- Symbolista derivointia varten ovat komennot **D** (osittaisderivaatta) ja **Dt** (kokonaisderivaatta).

```
In[1]:=D[Exp[x^2],x]
```

```
Out[1]=2 e^(x^2) x
```

- Integrointia varten ovat komennot **Integrate** (symbolinen integrointi) ja **NIntegrate** (numeerinen integrointi).

```
In[3]:=Integrate[2 Exp[x^2] x, x]
```

```
Integrate[2 Exp[x^2] x, {x, 0, 1}]
```

```
Out[3]=e^(x^2)
```

```
Out[4]=-1 + e
```

```
In[5]:=Integrate[x*y*Max[x,y], {x,0,1}, {y,0,1}]
```

```
Out[5]=1/5
```

Huom! Kaikkia lausekkeita ei voida integroida symbolisesti.

# Differentiaaliyhtälöt

- Differentiaaliyhtälöt ratkaistaan `DSolve` -komennolla
- Muuttujat merkataan argumenttinsa kanssa, esim. `z[t]`
- Derivaatat merkitään pilkkua ( `'` ) käyttäen, esim. `z'[t]`
- Yhtäsuuruus merkitään vertailuoperaattorilla `==`.
  - **Huom!** Reunaehto asettaessa älä tee kirjoitusvirhettä `z[0]=0`; edes `Clear` ei välttämättä pelasta (vrt. aikaisemmin), ainoa pelastus lienee `Quit`.

`DSolve` ottaa argumentteinaan:

1. Differentiaaliyhtälö ja reunaehdot aaltosulkeiden sisällä, esim. `{z'[t]==2*z[t]}` tai `{z'[t]==2*z[t],z[2]==4}`
2. Tuntematon funktio, esim. `z[t]`, 3. Funktion argumentti, esim. `t`

## Differentiaaliyhtälön ratkaisu - esimerkki 1/2

$$\frac{dz(t)}{dt} = 2 \cdot c \cdot t, \quad z(0) = 0, \quad z(2) = 16$$

- Ratkaistaan  $z(t)$  ilman reunaehtoja

```
In[194] := DSolve[{z'[t]==2*c*t},z[t],t]
```

```
Out[194]= {{z[t] -> c t^2 + C[1]}}
```

- **DSolve**-komentoon voi diff. yhtälön perään laittaa yhtä monta reunaehto kuin diff. yhtälön asteluku. Tällöin vastauksessa ei ole integroimisvakioita.

```
In[195] := DSolve[{z'[t]==2*c*t,z[0]==0},z[t],t]
```

```
= yhtalo = %[[1,1,2]]
```

```
Out[195]= {{z[t] -> c t^2}}
```

```
Out[196]= c t^2
```

Vastaus tallennettiin jatkokäsittelyä varten.

## Differentiaaliyhtälön ratkaisu - esimerkki 2/2

- Tuntematon parametri  $c$  voidaan ratkaistaan toisen reunaehdon avulla käyttäen `Solve`-komentoa:

```
In[202]:= Solve[{yhtalo == 16 /. {t -> 2}}, {c}]  
          = yhtalo /. %
```

```
Out[202]= {{c -> 4 }}
```

```
Out[203]= {4 t^2}
```

- Toisen asteen differentiaaliyhtälössä voi olla kaksi reunaehto.

```
In[203]:= DSolve[{z''[t] == t, z[0] == 0, z[2] == 4}, z[t], t]
```

```
Out[203]= {{z[t] -> 1/6 (8 t + t^3)}}
```

## Desimaaliluvut differentiaaliyhtälöissä

- Jos lausekkeissa esiintyy desimaalilukuja, Mathematica antaa vastauksen numeerisessa muodossa (esim.  $2.71828\dots$  eikä  $E$ ).
  - Tällaisten tulosten jatkokäsittely saattaa olla Mathematicalle vaikeaa, jopa mahdotonta.

- Älä siis mielellään tee näin:

```
In[207] := DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==0.14},x[t],t]
```

```
Out[207]= {{x[t] -> 0.1400000000000000 2.71828182845905^t }}
```

- Tee näin:

```
In[208] := DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==x0},x[t],t] /. {x0->0.14}
```

```
Out[208]= {{x[t] -> 0.14 E^t }}
```

- Tai: In[209] := DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==14/100},x[t],t]

```
Out[209]= {{x[t] -> (7 E^t)/50}}
```

# Differentiaaliyhtälösystemin numeerinen ratkaiseminen ja vaihetason kuvaajan piirtäminen

- Differentiaaliyhtälösystemejä voidaan ratkaista numeerisesti komennolla `NDSolve`.
- Vaihetason kuvaajan piirtäminen onnistuu komennolla `ParametricPlot`.
- Komentojen syntaksit löytyvät komennoilla:

`?ParametricPlot`

`?NDSolve`

- Kokeile:

```
In[1]:= s = NDSolve[{x'[t] == -y[t] - x[t]^2, y'[t] == 2 x[t] - y[t]^3,  
  x[0] == 1, y[0] == 1}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}]  
=ParametricPlot[{x[t], y[t]}/.s, {t, 0, 20}]
```



## Liukusäätimien lisääminen kuvaajiin

Mathematica on kätevä pienten interaktiivisten visualisointien tekemiseen. `Manipulate` funktiolla voit tehdä liukusäätimellä päivitettäviä kuvaajia.

Kokeile `In[1]:= Manipulate[Plot[{Sin[a*x], Cos[b*x]}, {x, -5, 5}],  
{a, 1, 2}, {b, 1, 2}]`

## Tehtävä A: Solow kasvumalli

Solow mallissa kansantalouden kokonaistuotantoa  $Y$  voidaan kuvata yhtälöllä

$$Y(k) = A\sqrt{k}, \quad (1)$$

jossa  $k$  kuvaa kerääntynyttä pääomaa ja  $A$  on mallin vakiotermin.

Vuosittain tuotannosta  $s\%$  investoidaan pääoman kartuttamiseen ja pääomasta  $p\%$  kuluu pois. Investointeja ja poistoja kuvaavat yhtälöt

$$I(s, k) = s \cdot Y(k) \quad (2)$$

$$D(k) = p \cdot k \quad (3)$$

1. Olkoon  $A = 1.2$  ja  $p = 0.03$ . Luo kuvaaja, jossa näkyy tuotanto, investoinnit sekä poistot, kun  $k \in [0, 1000]$ , ja  $s$ :n arvoa voi muuttaa liukusäätimellä välillä  $[0.1, 1]$ . Nimeä akselit ja anna käyrille selitteet.



🔗 Mitä vakiotermin  $A$  voisi kuvata?

2. Ratkaise  $s$ :n funktiona tasapainotila  $k = k^*$ , jossa  $I(s, k) = D(k)$ . Tallenna saamasi  $k^*$ :n lauseke funktioon `ksol`.

Lisää kuvaajaasi liukusäätimen mukana siirtyvä pystyviiva merkkamaan tasapainotilan kohtaa. (Esim. pystyviivan saa kohtaan  $k = s^2$  lisäämällä plottiin `GridLines -> {{s^2}, {}}`.)

3. Käyttövarallisuus saadaan tuotannon ja poistojen erotuksena. Millä  $s$ :n arvolla kansantalouden tasapainotilan käyttövarallisuus maksimoituu? Ratkaise siis millä  $s$ :n arvolla löytyy tasapainotilan käyttövarallisuuden derivaatan nollakohta.

$$\frac{d}{ds} [Y(k^*(s)) - pk^*(s)] = 0 \quad (4)$$

 Aseta  $s$  käyttövarallisuuden maksimoivalle tasolle. Lisää kuvaaja palautukseen.  Tulkitse tilanne sanallisesti.

## Tehtävä B: Munuaisen kaliumpitoisuus

Munuaisen kaliumpitoisuus hetkellä  $t$  on  $k(t)$ . Alkuhetkellä se on  $k(0) = 0.0025$  mg/cm<sup>3</sup>. Munuainen asetetaan suureen astiaan, jonka kaliumpitoisuus on 0.0040 mg/cm<sup>3</sup>. Tunnin kuluttua munuaisen kaliumpitoisuus on kohonnut arvoon  $k(1) = 0.0027$  mg/cm<sup>3</sup>. Tutki kaliumpitoisuuden muuttumista ajan funktiona.

- ✎ Mikä differentiaaliyhtälö kuvaa munuaisen kaliumpitoisuuden muuttumista? Vinkki: munuaisen kaliumpitoisuuden muutos,  $\frac{d}{dt}k(t)$ , on suoraan verrannollinen astian kaliumpitoisuuden ja munuaisen kaliumpitoisuuden erotukseen.
- ✎ Milloin munuaisen kaliumpitoisuus saavuttaa arvon 0.0035 mg/cm<sup>3</sup>? Vinkki: Ratkaistessasi tehtävää anna `Solve` -komennolle viimeiseksi argumentiksi `Reals`. Tämä kertoo Mathematicalle, että haluat vain reaalisia ratkaisuja.
- ✎ Kuinka suureksi munuaisen kaliumpitoisuus lopulta kohoaa? Laske raja-arvo käyttäen `Limit`-komentoa.

## Tehtävä C: Peto-saalis-malli

Peto-saalis-mallissa kuvataan kahden lajin populaatioiden koon vaihtelua seuraavalla differentiaaliyhtälösystemillä:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= -py(t) + qx(t)y(t)\end{aligned}$$

jossa muuttujat  $x(t)$  ja  $y(t)$  kuvaavat saalis- ja petokantojen kokoja kullakin ajanhetkellä  $t$ , ja  $a, b, p$  ja  $q$  ovat parametreja. Alussa saaliita on 5 ja petoja 2.

Parametrien arvot ovat  $a = 2$ ;  $b = 0.2$ ;  $p = 3$ ;  $q = 0.1$ .

1. Ratkaise differentiaaliyhtälösystemi numeerisesti käyttäen komentoa `NDSolve`. Piirrä ratkaisu vaihetasoon komennolla `ParametricPlot`. Kirjoita kaikki komennot yhden solun sisään, jotta parametrejä voi myöhemmin helposti muokata.



Liitä vastauksiisi kuva, joka kuvaa petojen saalisten määrän kehitystä vaihetasossa. Anna kuvalle otsikko.

2. Laske systeemille tasapainopiste, jossa  $ax(t) - bx(t)y(t) = 0$  ja  $-py(t) + qx(t)y(t) = 0$ .

✎ Mikä on systeemin tasapainopiste? Anna sille tulkinta.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälösystemi käyttäen alkutilanteena tasapainopisteettä ja piirrä kuvaaja. Kokeile sitten hieman tasapainotilanteesta poikkeavia alkuarvoja.

✎ Mitä näet kuvaajassa, kun käytät lähtötilanteena tasapainopistettä? Entä, kun muutat alkuarvoja tästä hieman?

## Kotitehtävä: Newsvendor-malli

- Tässä harjoituksessa ratkaisemme klassisen Newsvendor-tilausmallin optimitilausmäärän analyttisesti.
- Vesan yritys tilaa myyntiin vekottimia. Tilausmäärä on  $q$ . Tehtaan toimitusmäärä on epävarma. Se toimittaa osuuden  $Z$  (satunnaismuuttuja) tilausmäärästä. Vesa myy vekottimet hintaan  $p$  euroa per kappale. Tehtaalle Vesa maksaa  $c$  per toimitettu kappalemäärä. Vekottimien kysyntää ei tiedetä tarkalleen vaan se on satunnaismuuttuja  $D$ .
- Yrityksen saama tuotto  $\pi(q)$  on siis satunnaismuuttuja:

$$\pi(q) = \underbrace{p \min(D, Zq)}_{\text{myyntitulot}} - \underbrace{cZq}_{\text{kustannukset}} . \quad (5)$$

- Tehtävänäsi on löytää  $q$  jolla tuoton odotusarvo maksimoituu.

## Kotitehtävä: Newsvendor-malli


1. Satunnaismuuttuja  $Z \sim \text{Tas}[0,1]$  ja  $D \sim \text{Tas}[0,300]$ . Ratkaise Mathematicalla tuoton odotusarvon analyyttinen lauseke. Odotusarvon saat integroimalla

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[\pi(q)] \\
 &= \mathbb{E}[p \min(D, qZ) - cqZ] \\
 &= \int_0^{300} \int_0^1 f_D(d) f_Z(z) (p \min(qz, d) - cqz) dz dd,
 \end{aligned} \tag{6}$$

missä  $f_D$  ja  $f_Z$  ovat  $D$ :n ja  $Z$ :n tiheysfunktiot.

 Mikä on tuoton odotusarvon analyyttinen lauseke.

Vinkki: Ennen integrointia on keksittävä  $f_D$  ja  $f_Z$ . Mitä ne ovat tasajakautuneille satunnaismuuttujille?

 Liitä vastauksiisi kuva tuoton odotusarvosta tilausmäärän  $q$  funktiona.  $q \in [0, 500]$ ,  $p = 120$  ja  $c = 30$ .



## Kotitehtävä: Newsvendor-malli

2. Välttämätön ehto optimaaliselle tilausmäärälle  $q^*$  on

$$\frac{d\mathbb{E}[\pi(q^*)]}{dq} = 0 \quad (7)$$

Derivoi odotusarvon lauseke ja ratkaise nollakohta **Solve**-komennolla.

✎ Mikä on optimaalisen tilausmäärän lauseke?

✎ Sijoita lausekkeeseen  $p = 120$  ja  $c = 30$ . Mikä on tällöin optimaalinen tilausmäärä?