

Harjoitus 10: Optimointi II (Matlab / Excel)

SCI-C0200 Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio 2024



Harjoituksen aiheita

- Optimointimallin muodostaminen ja ratkaiseminen
- Excelin Solver-työkaluun tutustuminen
- Lineaarisen optimointitehtävän graafinen tarkastelu: rajoitusehdot ja kohdefunktion gradientti

Oppimistavoitteet

- Osaat formuloida optimointitehtävän annetusta ongelmasta
- Osaat käyttää Exceliä taulukkolaskennassa ja ratkaista sillä lineaarisen optimointitehtävän

Linear Programming (LP)-malli

Esimerkki - Maalifirma

- Maalifirma Sateenkaari valmistaa ulko- ja sisämaalia raaka-aineista M1 ja M2. Sisämaalin maksimikysyntä on 2 tonnia/päivä. Sisämaalin kysyntä on lisäksi korkeintaan 1 tonni/päivä suurempi kuin ulkomaalin kysyntä. Maalifirma pyrkii maksimoimaan kokonaistuottoaan.

Ongelman asettelu

	raaka-aine(tonni)/maali(tonni)		saatavuus/päivä
	ulkomaali	sisämaali	
raaka-aine M1	6	4	24
raaka-aine M2	1	2	6
tuotto(T€/tonni)	5	4	

- Sisämaalin maksimikysyntä on 2 tonnia/päivä, ja sisämaalin kysyntä on korkeintaan 1 tonni/päivä suurempi kuin ulkomaalin kysyntä.

Päätösmuuttujat:

x_1 = valmistettu ulkomaali tonnia/päivä

x_2 = valmistettu sisämaali tonnia/päivä

Kohdefunktio:

Ulkomaalista saatava tuotto = 5 T€/tonni

Sisämaalista saatava tuotto = 4 T€/tonni

- Maksimoi päivittäinen **kokonaistuotto** \Rightarrow maksimoidaan funktiota

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

Rajoitukset:

- Raaka-ainerajoitukset:

$$\text{Rajoitus raaka-aineelle M1: } 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$\text{Rajoitus raaka-aineelle M2: } x_1 + 2x_2 \leq 6$$

- Kysyntärajoitukset:

$$\text{Kysyntöjen riippuvuus maalien välillä: } x_2 \leq x_1 + 1$$

$$\text{Sisämaalin maksimikysyntä: } x_2 \leq 2$$

- Epänegatiivisuusrajoitukset (nonnegativity constraints):

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sateenkaaren optimointimalli:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{st.} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 & (1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 & (2) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 & (3) \\ & x_2 \leq 2 & (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Kyseessä on lineaarinen optimointitehtävä, eli lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä, eli LP-tehtävä (LP = Linear Programming).
- Kohdefunktio ja rajoitukset riippuvat lineaarisesti päätösmuuttujista.

Sateenkaaren optimointimalli matriisein:

$$\begin{aligned} \max \quad & f^T x \\ \text{st.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Matlab-notaatiolla matriisit ovat (ks. funktio `linprog`)

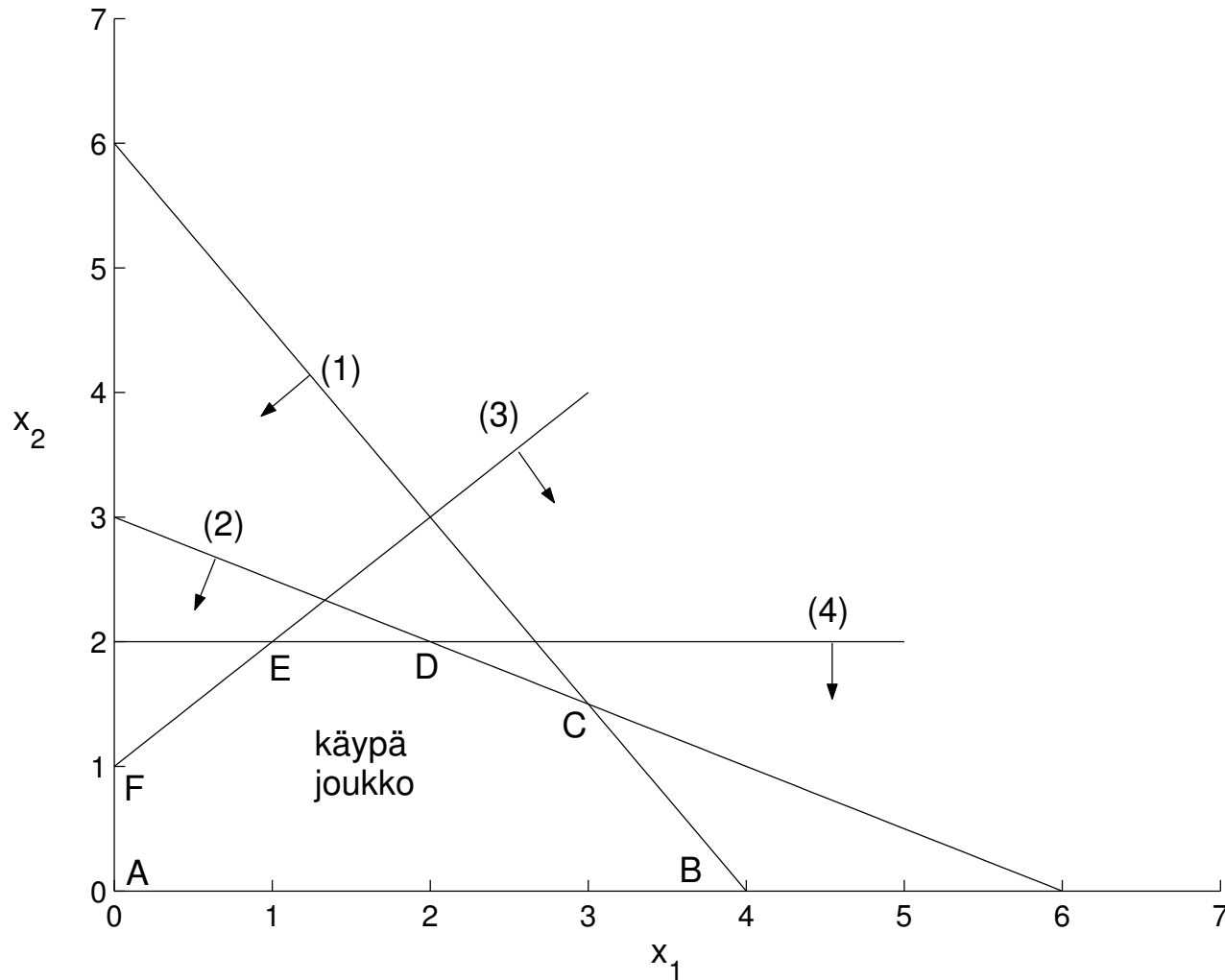
$$f = [5;4]$$

$$A = [6 \ 4; 1 \ 2; -1 \ 1; 0 \ 1]$$

$$b = [24;6;1;2]$$

- Optimointi: `[x,fval]=linprog(-f,A,b,[],[],[0;0],[])`
- Saisiko epänegatiivisuusrajoitteen $x \geq 0$ mukaan epäyhtälörajoitteeseen $Ax \leq b$?

Sateenkaaren optimointimallin graafinen ratkaisu

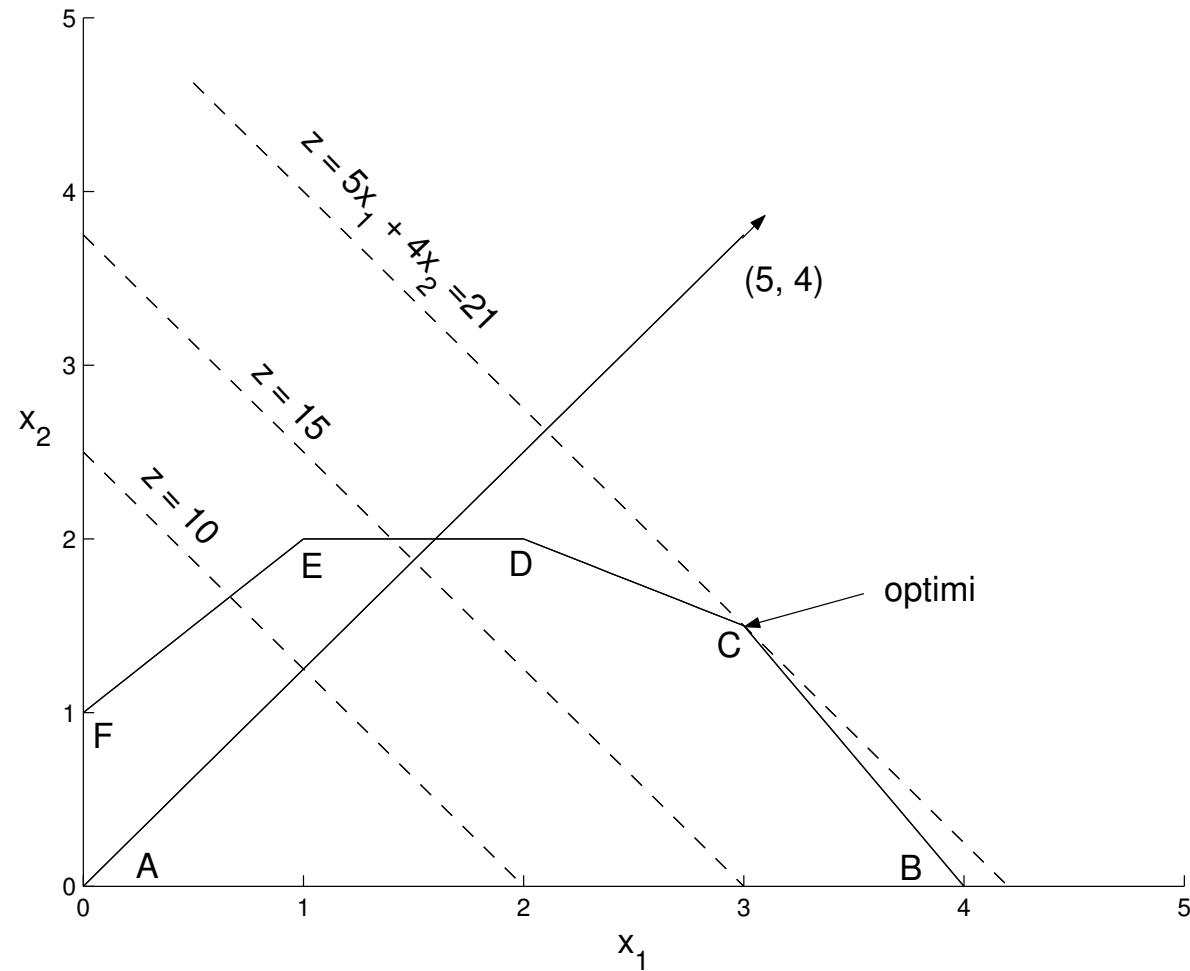


Kuva 1: Sateenkaaren optimointimallin käypien pisteiden joukko.

Sateenkaaren optimointimallin graafinen ratkaisu

- Kuvassa 1 on esitetty Sateenkaaren optimointimallin **käypien pisteiden joukko**. Käypään joukkoon kuuluvat ne pisteet, joissa kaikki rajoitusehdot toteutuvat.
- Kohdefunktion z gradientti $\nabla z = (\partial z / \partial x_1, \partial z / \partial x_2) = (5, 4)$ on kohtisuorassa suoraa $z = 5x_1 + 4x_2 = \text{vakio}$ vastaan ja ilmaisee käyrän $z = \text{vakio}$ noususuunnan. Katso kuva 2.

Sateenkaaren optimointimallin graafinen ratkaisu



Kuva 2: Sateenkaaren optimointimallin kohdefunktion gradientti (5,4) ja optimipiste.

Sateenkaaren optimointimallin graafinen ratkaisu

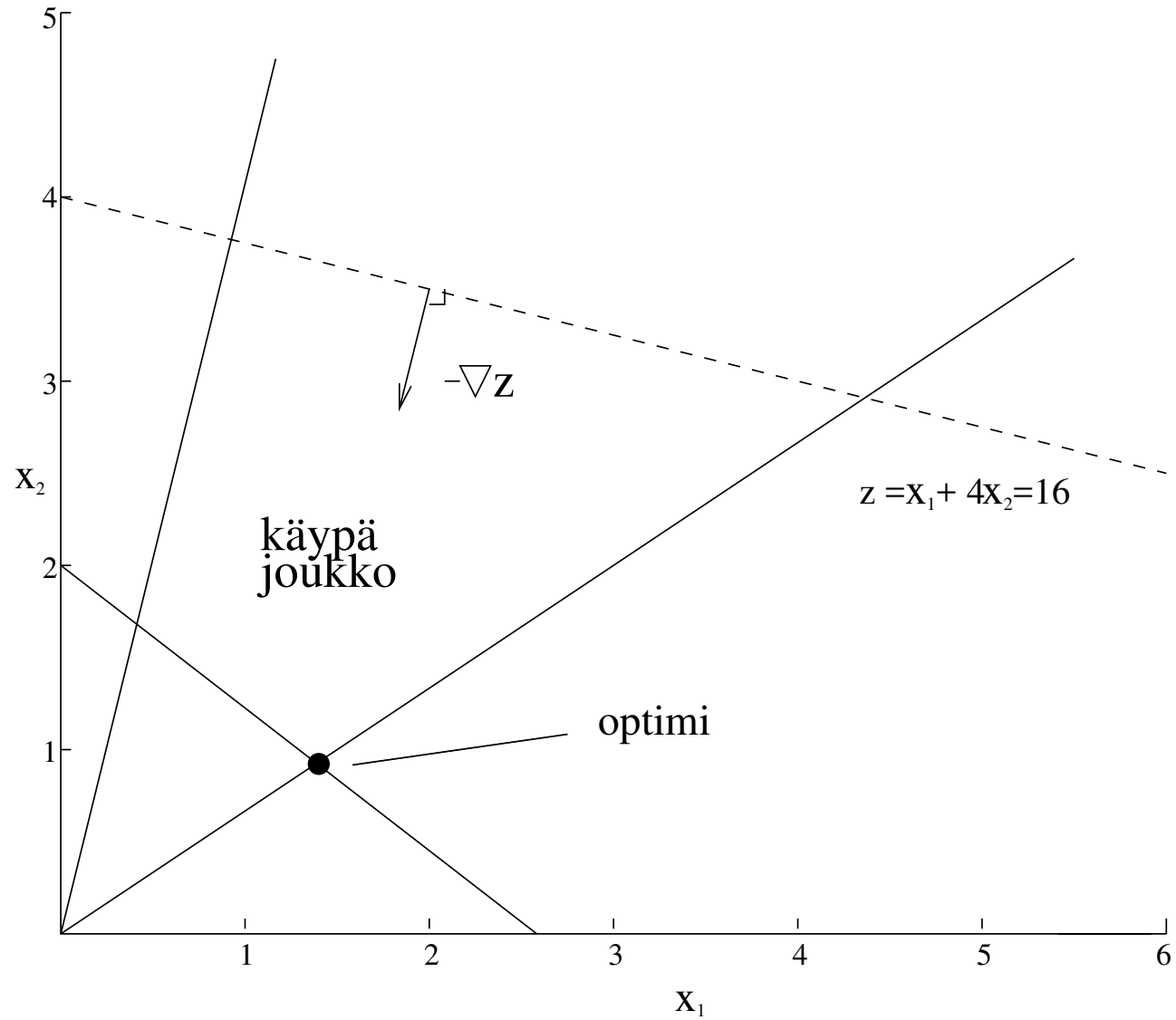
- Kuvasta 2 nähdään, että optimiratkaisu on pisteessä C, eli rajoitussuorien (1) ja (2) leikkauspisteessä.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 & (1) \\ x_1 + 2x_2 = 6 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3(\text{tn}) \\ x_2 = 1.5(\text{tn}) \end{cases} \quad z = 21000e$$

Kohdefunktion minimin löytäminen gradientin avulla

- Kun kohdefunktiota maksimoidaan kuljetaan gradientin suuntaan. Kuvassa 3 kohdefunktiota $z = x_1 + 4x_2$ minimoidaan, jolloin kuljetaan $-\nabla z$:n suuntaan. Täten:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 4x_2 \\ \Leftrightarrow \max -z &= -x_1 - 4x_2 \end{aligned}$$



Kuva 3: Optimiratkaisu silloin, kun kohdefunktiota z minimoidaan.

Excel-taulukon rakentaminen

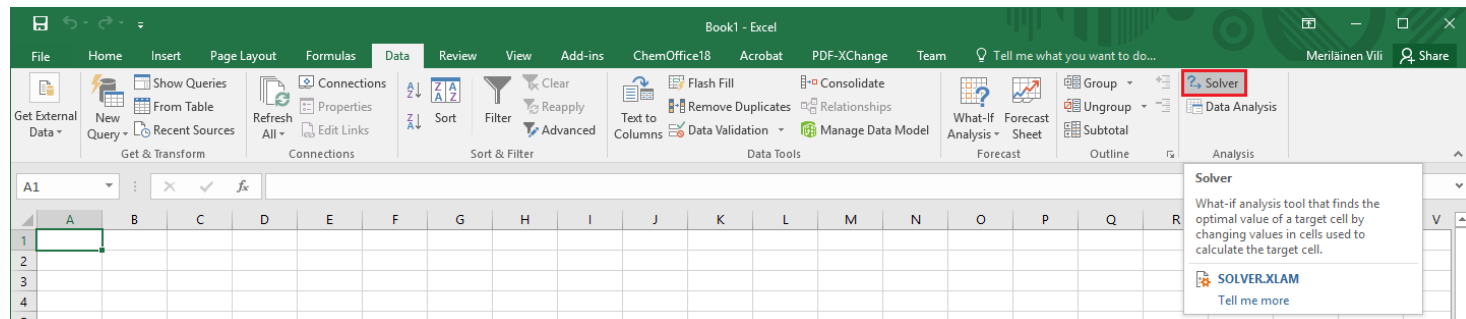
- Excel on liike-elämässä paljon käytetty taulukkolaskentaohjelma
- Excel-taulukon solut voivat saada arvoja, eli ne vastaavat muuttujia tai parametreja
- Taulukon solut voivat riippua myös muista soluista, jolloin ne vastaavat funktioita
- Solulle syötetään arvo `=`-merkillä (esim. `=A1+B2-5`)
- Excelissä on paljon sisäänrakennettuja funktioita (esim. `=SUM()`, `=AVERAGE()`)
- Taulukon ymmärrettävyyden vuoksi on tärkeää kirjoittaa muuttujien ja funktioiden viereisiin soluihin tekstiä, joka kertoo mitä solu pitää sisällään.

Excelin Solver-työkalu 1/4

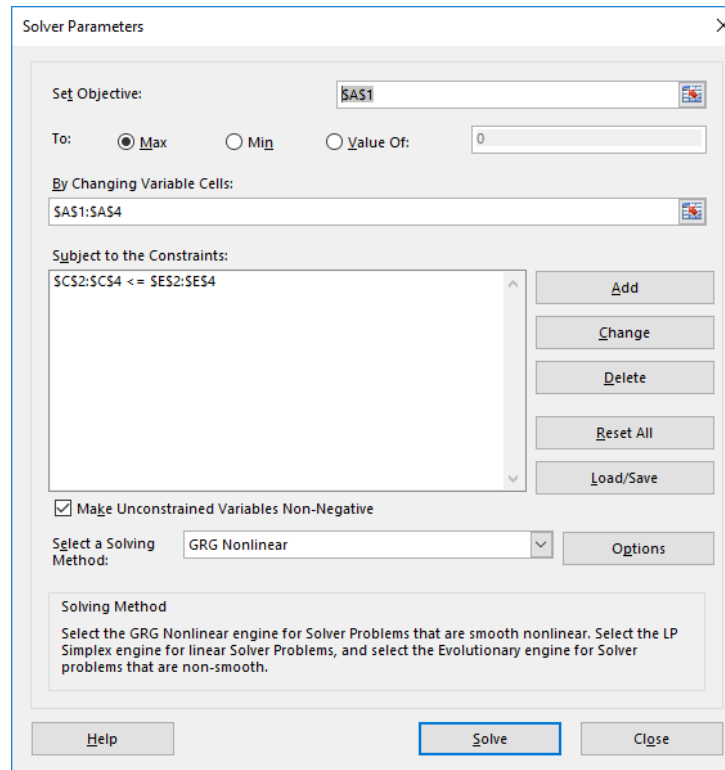
- Excelin Solverin avulla voi ratkaista pieniä lineaarisia ja epälineaarisia optimointitehtäviä.
- Sekä jatkuvien- että kokonaislukupäätösmuuttujien käyttö on mahdollista
- Optimoitava malli muodostetaan käyttäen hyväksi taulukkolaskentaohjelmiston ominaisuuksia, kuten kaavojen kopiointia ja aritmeettisiä operaattoreita.
- Esimerkiksi rajoitettaessa usean muuttujan summaa, summalauseke sijoitetaan taulukkoon ja rajoitetaan rajoitusehdolla summan sisältävän solun arvoa.
- Mallia muodostettaessa kannattaa pyrkiä mahdollisimman selkeään ja helposti muunneltavissa olevaan taulukkopohjaan.

Excelin Solver-työkalu 2/4

- Solverin käyttöönotto (Office 2016)
 - [File](#)-välilehti → [Options](#) → [Add-Ins](#)
 - Valitse [Manage](#)-tippuvalikosta [Excel Add-Ins](#) ja klikkaa [Go...](#)
 - Ruksi kohta [Solver Add-in](#) ja klikkaa [OK](#)
- Käyttöönoton jälkeen Solver löytyy valmiina [Data](#)-välilehdeltä



Excelin Solver-työkalu 3/4



- **Set Objective:** Kohdefunktiosolu
- **To:** Halutaanko kohdefunktiota maksimoida, minimoida vai asettaa tiettyyn arvoon ("Value of")
- **By Changing Variable Cells:** Päätösmuuttujasolujen alue



Excelin Solver-työkalu 4/4

- Rajoitusehtoja lisätään **Subject to the Constraints**-kohdan **Add**-nappulalla. Rajoitusehdot kirjoitetaan avautuvaan lomakkeeseen siten, että vasemmalle puolelle määritellään alue ja oikealla puolella voi olla joko vastaavan kokoinen alue, yksittäinen solu, lukuarvo tai lauseke. Keskeltä valitaan vertailuoperaattori ja voidaan myös asettaa kokonaisluku/binaarirajoitus päätösmuuttujasoluille ("int" tai "bin"), jolloin oikealle puolelle ei kirjoiteta mitään.
- Optimointitehtävän ratkaisun etsiminen käynnistyy painamalla **Solve**-nappulaa.

Tehtävä A: GSM-linkit (Matlab)

- Kolme GSM-linkkimastoa tulee sijoittaa xy -tasoon siten, että ne ovat korkeintaan 17 km:n etäisyydellä toisistaan ja mahdollisimman lähellä runkoverkon solmua, joka sijaitsee pisteessä $(-20, 30)$.
- Linkin 1 tulee kattaa piste $(-8, 3)$, linkin 2 piste $(14, 25)$, ja linkin 3 piste $(25, 4)$. Kunkin linkin kantavuus on 10 km.
- Kurssin MyCourses-sivuilla (harjoituskerran 10 lisämateriaali kansiossa) olevalla funktiolla `piirragsm` voit piirtää kuvan, jossa näkyy kolmen linkin kattavuusalueet, pisteet 1-3 ja runkoverkon solmu.
- Huom. Kyseessä ei ole lineaarinen optimointitehtävä. Tehtävä B ja kotitehtävä sensijaan ovat lineaarisia tehtäviä.

1. Ratkaise linkkien optimaaliset sijainnit, kun optimointikriteerinä on minimoida linkkien yhteenlaskettua etäisyyttä runkoverkon solmusta.
 - Vinkki: tarvitset seuraavat etäisyystiedot: linkkien etäisyydet runkoverkon solmusta, linkkien etäisyydet toisistaan, ja linkkien etäisyydet katettavista pisteistä. Luo funktio joka laskee kahden pisteen välisen etäisyyden. Käytä sitä valitsemassasi Matlabin optimointialgoritmissa joka minimoi linkkien yhteenlaskettua etäisyyttä runkoverkon solmusta. Jos käyttämäsi algoritmi vaatii toimiakseen käyvän aloitusratkaisun, niin voit yrittää etsiä sitä tarkastelemalla tilannetta `piirragsm` funktion avulla.
- 🔗 Mikä on kohdefunktion arvo optimissa?

-  Liitä vastauksiisi kuva linkkien optimaalisista sijainneista käyttäen piirragm-funktiota. Nimeä akselit.
2. Ratkaise linkkien optimaaliset sijainnit, kun linkkien välimatkarajoitetta kevennetään 19 kilometriin.
-  Paljonko kohdefunktion optimaalinen arvo paranee suhteessa 1. kohtaan?

Tehtävä B: puurohiutaleet (Excel)

- Yritys valmistaa Pika- ja Herkkupuuroa ja myy niitä 1 kg pakkauksissa.
 - Pikapuurohiutaleiden myyntihinta on 4 €/kg ja Herkkupuurohiutaleiden 3 €/kg. Valmistuskustannukset ovat 1 €/kg (Pika) ja 0.8 €/kg (Herku). Yhden kg:n valmistamiseen Pikapuurohiutaleita tarvitaan 100 g ohraa, 200 g ruisleseitä ja 700 g kauraa. Yhden kg:n valmistamiseen Herkkupuurohiutaleita tarvitaan 500 g ohraa, 300 g ruisleseitä ja 200 g kauraa. Ohran hankintahinta on 1.2 €/kg, ruisleseiden 1.4 €/kg ja kauran 1 €/kg.
1. Optimoி seuraavan viikon valmistusmäärät, kun yrityksellä on rahaa valmistus- ja hankintakustannusten kattamiseen 1000 € ja raaka-aineiden toimittaja kykenee toimittamaan enintään 150 kg ohraa, 120 kg ruisleseitä ja 300 kg kauraa. (Huom: yritys voi myydä vain kokonaisia pakkauksia. Lisää Solveriin siis kokonaisluku rajoitus.)

Vinkit: formuloi tehtävä Excelissä tekemällä ”tuloslaskelma” jossa myynnistä vähennetään valmistus- ja hankintakustannukset, ja viivan alle jää voitto. Käytä Solveria voiton maksimoimiseen.

- ✎ Mitkä ovat optimaaliset Pika- ja Herkkupuurohiutalepakettien tuotantomäärät? Paljonko tällöin tilataan kutakin raaka-ainetta?
- ✎ Mitkä ovat optimaaliset Pika- ja Herkkupuurohiutalepakettien tuotantomäärät, jos myyntihinnat ovat 3 €/ kg (Pika) ja 4 €/ kg (Herkku)? Entä jos molempien myyntihinta on 3 €/ kg?

Kotitehtävä: kuljetusongelma (Matlab)

- Uusi Purjekala-alustaa käyttävä puhelinvalmistaja, **Boutti Ltd**, palkkaa sinut optimoimaan jakelua.
- Boutti valmistaa puhelimia kolmessa tehtaassa, Hong Kongissa, Hafnarfjörðurissa ja Sansibarissa. Puhelimia jaellaan jälleenmyyjille kahdessa keskuksessa, Milanossa ja Caracasissa.
- Puhelimia kuljetetaan 10000 puhelimen kuljetuskolleissa. Tehtailla (Hong Kong, Hafnarfjörður, Sansibar) on **neljännesvuosittaiset** toimituskapasiteetit 1000, 1500, ja 1200 (kollia) ja **neljännesvuosittainen** kysyntä jakelukeskuksissa (Milano, Caracas) on 2300 ja 1400 (kollia).
- Tehtävänä on kuljettaa puhelimia tehtaista jakelukeskuksiin, siten että (i) jakelukeskusten kysyntä tyydyttyy ja (ii) kuljetuskustannukset minimoituvat.

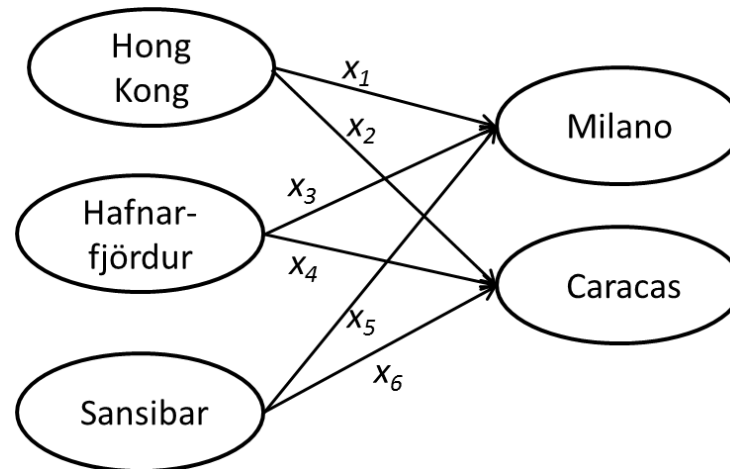
- Etäisyydet ovat:


km	Milano	Caracas
Hong Kong	1000	2690
Hafnarfjörður	1250	1350
Sansibar	1275	850

- Kuljetusyhtiö laskuttaa yhden kollin kuljetuksesta $0.80\text{€}/\text{km}$.
Kuljetuskustannukset yhtä kollia kohden ovat:

€	Milano	Caracas
Hong Kong	800	2150
Hafnarfjörður	1000	1080
Sansibar	1020	680

1. Muodosta kuljetuskustannukset minimoiva LP-tehtävä ja ratkaise se.
 - Vinkki: tarvitset päätösmuuttujat $x = (x_1, \dots, x_6)^T$, jotka kuvaavat kuinka monta kolliä kuljetetaan kustakin tehtaasta kuhunkin jakelukeskukseen (ks kuva). Esimerkiksi päätösmuuttuja x_1 kertoo kuinka monta kolliä kuljetetaan Hong Kongista Milanoon. Tällöin esim. $x_5 + x_6$ ei saa ylittää Sansibarin tehtaan toimituskapasiteettia. Huomaa, että kaikista tehtaista ei ole pakko kuljettaa kaikkiin jakelukeskuksiin.



 Kirjoita tehtävä vastauspaperiisi matriisimuodossa, eli tehtävänä


$$\begin{aligned} \min \quad & f^T x \\ & Ax \leq b \\ & lb \leq x \leq ub \end{aligned}$$

Ilmaise vastauksessasi mitä ovat matriisit / vektorit f , x , A , b , lb ja ub .

Katso `linprog`-funktion helpistä mallia:

<http://www.mathworks.se/help/optim/ug/linprog.html>

Mallia löytyy myös kalvojen alusta maalifirman optimointitehtävä esimerkistä.

 Toimitusjohtaja R. Bellman haluaa tietää paljonko kolleja toimitetaan kustakin tehtaasta kuhunkin jakelukeskukseen. Esitä asia hänelle vastauksessasi miellyttävässä taulukkomuodossa.

 Saat kannustepalkan vain jos 13 miljoonan euron **vuotuinen** kustannustavoite alittuu. Alittuuko se, ja kuinka paljon?

 Liitä vastaukseesi kommentoitu Matlab-lähdekoodi.