



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Vättö

Harjoitukset, Viikko 2B, 2024



Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Muodosta seuraavien käyrien parametrisoinnit (annettuun suuntaan): a) jana pisteestä $(-1, 2, 1)$ pisteeseen $(5, 4, -2)$. b) paraabelin $y = x^2$ kaari pisteestä $(-2, 4)$ pisteeseen $(1, 1)$. c) origokeskisen 3-säteisen ympyrän kaari vastapäivään pisteestä $(3, 0)$ pisteeseen $(0, 3)$. d) edellisen kohdan käyrä vastakkaiseen suuntaan.

TEHTÄVÄ M2 Etsi parametrisoidun käyrän $x = t^3 + t$, $y = 1 - t^3$, kulmakerroin parametrin arvolla $t = 1$.

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} \mathbf{i} + \frac{t}{t + 1} \mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

TEHTÄVÄ J2

- a) Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.
- b) Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt,$$

missä a on ellipsin ison akselin puolikas ja $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Vierivän renkaan (säde = R) uraan on jäänyt kivi. Kuinka pitkän matkan kivi kulkee yhden kierroksen aikana suhteessa pyörän akselin etenemään matkaan $2\pi R$?

TEHTÄVÄ K2 (a) Muodosta käyrän $\mathbf{r}(t) = at^2 \mathbf{i} + bt \mathbf{j} + c \ln t \mathbf{k}$ pituuden määrätty integraali, kun $1 \leq t \leq T$. Laske integraalin arvo, kun $b^2 = 4ac$. (b) Piirrä käyrä S ja määrittele sen laatu:

$$x(t) = a \cos t \sin t, \quad y(t) = a \sin^2 t, \quad z(t) = bt.$$

Mikä on käyrän S pituus, kun $0 \leq t \leq T$?

Haaste

Hiukkanen liikkuu pitkin ellipsiä

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

parametrisoituna muodossa $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

- a) Määritä hiukkasen nopeus ja kiihtyvyys parametrin arvolla $t = \pi/4$.
- b) Määritä kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponentit parametrin arvolla $t = \pi/4$.

(Vast: $\mathbf{a}_N = -(6\sqrt{2}/13)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$)

Vastauksia

TEHTÄVÄ J1

Ratkaisu: $(\frac{z}{1} \wedge / 1, (1 + \frac{z}{1} \wedge) -), (\frac{z}{1} \wedge / 1 - 1, (1 - \frac{z}{1} \wedge) -)$ pystysuora tangentti pisteissä
; $1 = \hat{n} \frac{z}{1} = \hat{n} \frac{z}{1} = x$ Asymptootit

TEHTÄVÄ J2

Ratkaisu: $z^q + z^p \wedge z^x$ (a)

TEHTÄVÄ K1

Ratkaisu: z/p

TEHTÄVÄ K2

Ratkaisu: $z^q + z^p \wedge z^L$ (a) ; $L \ln q + (1 - z^L)^p$ (a)