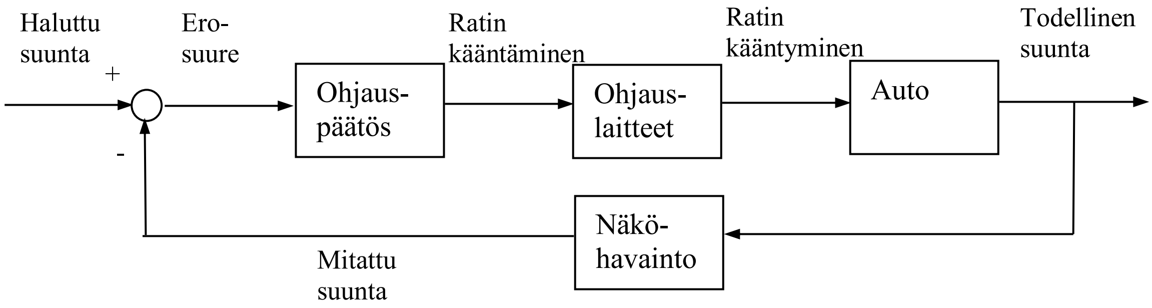
ELEC-C1230 Säätötekniikka
1. laskuharjoitus
Vastaukset

1.

a.



ohjauspäätös = säädin
ohjauslaitteet = toimilaite
auto = prosessi, systeemi, järjestelmä
näköhavainto = mittalaite
ratin kääntäminen = ohjaussuure
ratin kääntyminen = toimisuure
todellinen suunta = säädetty suure, vaste
mitattu suunta = mitattu suure
haluttu suunta = ohjesuure, käskysuure, referenssi, heräte

b. Esimerkkejä erilaisista häiriöistä:

Ohjauspäätös: väsymys, päihteet, kuljettajan hitaus ja virhearviot, muu liikenne
Ohjauslaitteet: tekniset viat, rajoitteet (rattia ei voi kääntää mielivaltaisen paljon)
Auto: tekniset viat, renkaat, urat tiessä, liukkaus, sää
Näköhavainto: näkökyky, häikäisy, sää

2. Linearisoinnissa funktio korvataan tarkastelupisteessä ja sen ympäristössä funktion tangentilla tarkastelupisteessä. Tehtävässä y on x:n funktio, mitä tavallisesti merkittäisiin $y(x)$. Nyt jätetään sulut pois lyhyyden vuoksi.

a. Lasketaan funktion arvo (y_0) tarkastelupisteessä:

$$y_0 = \sqrt{x_0^2 - x_0} = \sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2}$$

Sovelletaan Taylorin sarjaa:

$$y \approx y_0 + \frac{dy}{dx}(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-1) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(2) = \frac{4-1}{2\sqrt{4-2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad y \approx \sqrt{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot(x-2) = \left(\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}}x$$

Uusien muuttujien $\Delta y = y - y_0$ ja $\Delta x = x - x_0$ avulla kirjoitettuna yhtälö on

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}(x_0)\cdot\Delta x = \frac{3}{2\sqrt{2}}\Delta x$$

b. Lasketaan tarkastelupisteen y:n arvo y_0:

$$y_0 = \frac{\ln x_0}{x_0^2} = \frac{\ln 2}{4}$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{x^{-1}\cdot x^2 - 2x\cdot\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(2) = \frac{1 - 2\ln 2}{8}$$

$$\Rightarrow \quad y \approx y_0 + \frac{dy}{dx}(x_0)\cdot(x - x_0) = \frac{\ln 2}{4} + \frac{1 - 2\ln 2}{8}(x-2)$$

Tai Δy:n ja Δx:n avulla kirjoitettuna:

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}(x_0)\cdot\Delta x = \frac{1 - 2\ln 2}{8}\Delta x$$

3a. Systeemiä kuvaava differentiaaliyhtälö saadaan voimatasapainosta.

$$ma(t)+Bv(t)+kz(t)=F(t)$$
$$m\ddot{z}(t)+B\dot{z}(t)+kz(t)=F(t)$$
$$\ddot{z}(t)+\frac{B}{m}\dot{z}(t)+\frac{k}{m}z(t)=\frac{1}{m}F(t)$$

Sijoitetaan numeroarvot:

$$\ddot{z}(t)+2\dot{z}(t)+z(t)=F(t) \qquad z(t)\propto y(t) \text{ ja } F(t)\propto u(t)$$

b. Valitaan tilat siten, että molemmilla on selkeä fysikaalinen merkitys (paikka ja nopeus) kuten tehtävässä edellytettiin.

$$\begin{cases} x_1(t)=z(t) \\ x_2(t)=v(t)=\dot{z}(t) \end{cases}$$

Näistä saadaan edelleen:

$$\dot{x}_1(t)=\dot{z}(t)=x_2(t) \text{ ja } y(t)=z(t)=x_1(t)$$

Alkuperäisestä differentiaaliyhtälöstä

$$\ddot{z}(t)=-z(t)-2\dot{z}(t)+F(t)$$

saadaan:

$$\ddot{z}(t)=\dot{x}_2(t)=-z(t)-2\dot{z}(t)+F(t)=-x_1(t)-2x_2(t)+u(t)$$

Järjestetään nämä yhteen

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=-x_1(t)-2x_2+u(t) \\ y(t)=x_1(t) \end{cases}$$

ja kirjoitetaan tilaesitykseksi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

4.

a. Pyörimisliikkeen perusyhtälön

$$\sum_i T_i = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

mukaan pyörimisakselilla vaikuttavien vääntömomenttien summa on yhtä suuri kuin hitausmomentin ja kulmakiihtyvyyden tulo. Tehtävän tapauksessa antennia kääntää vääntömomentti $T(t)$ ja liikettä vastustaa vaimentava voima $B\dot{\theta}$. Differentiaaliyhtälö on siis:

$$T(t) - B\dot{\theta}(t) = J\ddot{\theta}(t) \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) = -\frac{B}{J}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{J}T(t)$$

b. Valitaan tiloiksi tehtäväpaperin ohjeen mukaan antennin kulma ja kulmanopeus:

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$$

Derivoimalla tilamuuttujat saadaan tilaesitystä varten tarvittavat differentiaaliyhtälöt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{B}{J}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{J}T(t) = -\frac{B}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}T(t) \end{cases}$$

Kootaan yhtälöistä tilaesitys. Lähtösuure, jota merkitään $y(t)$:llä on antennin kulma.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}T(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

c. Ohjataan moottoria niin, että sen tuottama vääntömomentti on verrannollinen antennin todellisen kulman θ(t) ja antennin halutun kulman θ_{ref}(t) erotukseen säännön

$$T(t) = k\left(\theta_{ref}(t) - \theta(t)\right)$$

mukaisesti (k on skalaari ja vakio). Sijoittamalla yllä oleva yhtälö a-kohdassa johdettuun differentiaaliyhtälöön saadaan

$$k\left(\theta_{ref}(t) - \theta(t)\right) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\frac{B}{J}\dot{\theta}(t) - \frac{k}{J}\theta(t) + \frac{k}{J}\theta_{ref}(t)$$

Toimimalla kuten b-kohdassa saadaan differentiaaliyhtälöt tilamuuttujille:

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\dfrac{B}{J} x_2(t) - \dfrac{k}{J} x_1(t) + \dfrac{k}{J} \theta_{ref}(t) \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälöjen pohjalta voidaan kirjoittaa tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{J} & -\dfrac{B}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{J} \end{bmatrix} \theta_{ref}(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Huomaa, että tämä tilaesitys kuvaa jo suljettua (takaisinkytkettyä) järjestelmää. Tulosuureena on nyt haluttu kulmapoikkeaman arvo eli asetusarvo. Aikaisemmat mallit (differentiaaliyhtälöt ja tilaesitykset) kuvasivat vain tutkittavaa prosessia ilman mitään säätöä.

5. * Rakettiin vaikuttaa massan hitaus (massa $m \times$ kiihtyvyys a) ma. Kiihtyvyys on paikan toinen derivaatta, joten massan hitaus voidaan kirjoittaa $m\ddot{z}$. Massan hitauden lisäksi rakettiin vaikuttaa työntövoima F.

a. Näin saadaan differentiaaliyhtälöksi

$$m\ddot{z}(t) = F(t)$$

ja jos tottumuksen vuoksi merkitään $y = z$ ja $u = F$, niin

$$m\ddot{y}(t) = u(t) \Leftrightarrow \ddot{y}(t) = \frac{1}{m} u(t)$$

b. Valitaan ensin tilamuuttujat. Mallin kertaluku (korkein derivaatta) on kaksi, joten kaksi tilamuuttujaa riittää:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

Derivoidaan tilamuuttujat

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \end{cases}$$

Kirjoitetaan derivaattojen lausekkeet tilamuuttujien $\mathbf{x}(t)$ ja ohjauksen $u(t)$ avulla. Sijoittamalla x_2:n määrittely ensimmäiseen lausekkeeseen ja a-kohdassa johdettu differentiaaliyhtälö jälkimmäiseen saadaan

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{m} u(t) \end{cases}$$

ja $y(t) = x_1(t)$. Saati tilaesitys voidaan vielä kirjoittaa standardimuodossa

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Järjestelmä ja sitä vastaava tilaesitys on *lineaarinen*. Yleisessä tapauksessa meillä voisi olla *epälineaarinen* järjestelmä, jota vastaisi tilaesitys

$$\text{yleinen muoto} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), u(t)\right) \\ y(t) = g\left(\mathbf{x}(t), u(t)\right) \end{cases}$$

Tämä voisi sisältää esimerkiksi tilamuuttujien tuloja, potensseja, trigonometrisiä funktioita jne. jne.

Järjestelmän käyttäytymistä erilaisilla herätteillä (voimilla) voidaan tutkia esimerkiksi simuloimalla, mutta maalaisjärjelläkin voidaan päätyä samoihin tuloksiin.

Impulssimainen voima (räjähdys, luoti, jne.):

> Raketti lähetetään liikkeelle alkuvoimalla ja voiman syöttö lopetetaan välittömästi => Raketti lähtee liikkeelle vakionopeudella ja raketin etäisyys alkupisteestään kasvaa lineaarisesti ajan funktiona

Vakiovoima (askelmainen voima):

> Rakettiin syötetään jatkuvasti lisää potkua vaikka mitään vaimentavia voimia ei ole => Raketin nopeus kasvaa lineaarisesti ja etäisyys alkupisteestään parabolisesti ajan funktiona.

Mikäli differentiaaliyhtälöt ratkaistaisiin, saataisiin tarkat ratkaisut:

Impulssimainen voima:
$$\begin{cases} z(t) = \dfrac{1}{m} t \\ v(t) = \dfrac{1}{m} \end{cases}$$

Askelmainen voima:
$$\begin{cases} z(t) = \dfrac{1}{2m} t^2 \\ v(t) = \dfrac{1}{m} t \end{cases}$$