Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Vättö
Harjoitukset, Viikko 3A, 2024

Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Mahdolliset vastaukset on siirretty loppuun.

Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Tarkastellaan funktiota

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}.$$

Onko funktiolla raja-arvo pisteessä $(1,1)$? Voiko funktion määritellä pisteessä $(1,1)$ s.e. se on jatkuva?

TEHTÄVÄ M2 Jatkoa edelliseen: Voiko funktion määrittelyaluetta laajentaa s.e. se on jatkuva koko xy-tasossa?

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Todista, että seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a) } \frac{(1+y^2)\sin x}{x}, \qquad \text{b) } \frac{x\tan y}{y}.$$

TEHTÄVÄ J2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\frac{x^2 + y^2 - x^3 y^3}{x^2 + y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Olkoon

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}, \text{ kun } (x,y) \neq (0,0).$$

a) Tutki funktion raja-arvoja origossa pitkin suoria $y = kx$, $k > 0$.
b) Tutki a-kohdan tapaan raja-arvoja pitkin paraabeleja $y = kx^2$.
c) Voidaanko $f(0,0)$ määritellä niin, että funktio on jatkuva origossa?

TEHTÄVÄ K2 Funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ olkoon jatkuva pisteessä (x_0, y_0, z_0). Määritellään funktio $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(x,y) = f(x,y,z_0)$. Todista, että g on jatkuva pisteessä (x_0, y_0).

Vastauksia

TEHTÄVÄ J1
Ratkaisu: a) 1; b) 0.
TEHTÄVÄ K2
Ratkaisu: Käytä $\varepsilon\delta$-tekniikkaa ja tarkastele etäisyyttä $|g(x,y) - g(x_0,y_0)|$.