Osamurtokehitelmä lyhyesti

Tarkastellaan rationaalipolynomia

$$\frac{p(s)}{q(s)},$$

jossa $p(s)$ ja $q(s)$ ovat muuttujan s polynomeja. Polynomi $q(s)$ voidaan jakaa reaalikertoimisiin tekjöihin, jotka ovat muotoa $(s-a)$ tai (s^2+bs+c). Ensimmäisessä tapauksessa a on polynomin $q(s)$ reaalinen juuri (eli $q(a)=0$), ja jälkimmäisessä tapauksessa polynomin s^2+bs+c kompleksiset juuret ovat polynomin $q(s)$ juuria.

Polynomin $q(s)$ tekijät voivat esiintyä myös korkeammissa (kuin ensimmäisssä) potenssissa, eli polynomin $q(s)$ yleinen tekijöihinjako on muotoa

$$q(s)=(s-a_1)^{m_1}(s-a_2)^{m_2}\cdots(s-a_k)^{m_k}(s^2+b_1s+c_1)^{n_1}(s^2+b_2s+c_2)^{n_2}\cdots(s^2+b_\ell s+c_\ell)^{n_\ell}.$$

Osamurtokehitelmässä jokaista $(s-a)^m$ muotoista tekijää vastaa osamurtoluvut

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-a)^m},$$

ja jos $m=1$ niin termejä tulee vain yksi (ensimmäinen). Jokaista $(s^2+bs+c)^n$ muotoista tekijää osamurtokehitelmässä vastaa puolestaan osamurtoluvut

$$\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c}+\frac{B_2s+C_2}{(s^2+bs+c)^2}+\cdots+\frac{B_ns+C_n}{(s^2+bs+c)^n},$$

ja jos $n=1$ niin termejä tulee vain yksi (ensimmäinen).

Kun jokaista polynomin $q(s)$ tekijää vastaava osamurtoluku on muodostettu, niin kaikki osamurtoluvut lavennetaan saman nimisiksi, ja tämän jälkeen kertoimet $A_1, A_2, \ldots A_n, B_1, B_2\ldots$ ratkaistaan niin, että kunkin s:n potenssin kertoimet ovat samat kuin polynomissa $p(s)$.

Tarkastellaan esimerkiksi Luennon 3 esimerkkiä, jossa ratkaistiin massakappaleen vaste pengerherätteellä (Luku 3, sivu 28). Tarkasteltava rationaalipolynomi on siis

$$\frac{1}{s^2(s^2+2s+5)},$$

eli sivun ylälaidan notaatiossa $p(s)=1$ ja $q(s)=s^2(s^2+2s+5)$. Polynomi $q(s)$ on jaettu valmiiksi tekijöihin, jotka ovat siis s^2 (muotoa $(s-a)^n$ avoilla $a=0$ ja $n=2$) ja s^2+2s+5 (muotoa $(s^2+bs+c)^m$ arvoilla $b=2, c=5$ ja $m=1$). Osamurtokehitelmään tarvitaan siis tekijää s^2 vastaaman osamurtoluvut

$$\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2},$$

ja tekijää s^2+2s+5 vastaamaan osamurtoluku

$$\frac{Bx+C}{s^2+2s+5},$$

eli osamurtokehitelmä on muotoa

$$\frac{1}{s^2(s^2+2s+5)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{Bx+C}{s^2+2s+5}.$$

Lavennetaan seuraavaksi kaikki osamurtoluvut saman nimisiksi, mistä saadaan

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{Bx+C}{s^2+2s+5} &= \frac{A_1 s(s^2+2s+5)+A_2(s^2+2s+5)+(Bs+C)s^2}{s^2(s^2+2s+5)} \\ &= \frac{A_1(s^3+2s^2+5s)+A_2(s^2+2s+5)+Bs^3+Cs^2}{s^2(s^2+2s+5)} \\ &= \frac{(A_1+B)s^3+(2A_1+A_2+C)s^2+(5A_1+2A_2)s+5A_2}{s^2(s^2+2s+5)}.\end{aligned}$$

Viimeisen muodon pitää olla nyt sama kuin alkuperäinen rationaalipolynomi

$$\frac{1}{s^2(s^2+2s+5)},$$

joten asettamalla osoittajat yhtäsuuriksi saadaan yhtälö

$$(A_1+B)s^3+(2A_1+A_2+C)s^2+(5A_1+2A_2)s+5A_2=1.$$

Oikeastaan tämän on yhtälöryhmä, koska kaikkien s:n potenssien kertoimet pitää olla samat molemmin puolin. Koska oikealla puolella on vain vakio 1, niin saadaan

$$\begin{cases} A_1+B=0 \\ 2A_1+A_2+C=0 \\ 5A_1+2A_2=0 \\ 5A_2=1 \end{cases},$$

mistä saadaan suoraan $A_2=\frac{1}{5}$. Sijoittamalla tämä kolmanteen yhtälöön saadaan $5A_1+2\frac{1}{5}=0$, eli $A_1=-\frac{2}{25}$, ja edelleen $B=\frac{2}{25}$ sekä $C=-\frac{1}{25}$. Toki tämä yhtälöryhmä voitaisiin ratkaista suoraan esimerkiki Matlabissa, mutta toisaalta koko osamurtokehitelmä voitaisiin ratkaista suoraan Matlabissa komennolla `partfrac`. Joka tapauksessa, sijoittamalla saadut arvot alkuperäiseen osamurtokehitelmän lausekkeeseen, saadaan osamurtokehitelmäksi

$$\frac{1}{s^2(s^2+2s+5}=-\frac{2}{25}\frac{1}{s}+\frac{1}{5}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{25}\frac{2s-1}{s^2+2s+5}.$$

Palataan vielä lopuksi luentokalvojen Luvun 3 sivulle 28, ja todetaan, että ottamalla käänteinen Laplace-muunnos tästä osamurtokehitelmästä tosiaankin saadaan kalvossa esitetty pengervaste massakappaleelle.