ELEC-C1230 Säätötekniikka
3. laskuharjoitus
Vastaukset

Huom. (Laplace-muunnos): Laske alla olevista harjoituksista kohdasta **1**.II. tehtävät a, b ja c sekä kohdasta **1**.III. tehtävät a, b ja c. Huom. harjoituksen ratkaisuissa nämä on esitetty aika kompaktisti. Varmista siis nyt, että osaat itse laskea.

Ratkaisu:

Tässä on ensiksi annettu hieman selvennetyt ratkaisut yllä mainittuihin tehtäviin.

1.II.a. Etsitään nimittäjän tekijät. Ne ovat reaalisia ja molemmat -3. Lauseke saadaan suoraan muotoon, jonka käänteismuunnos löytyy taulukosta.

1.II.b. Nimittäjällä on tässäkin reaalijuuret. Tehdään *osamurtokehitelmä* ja saadaan

$$F(s)=\frac{4}{(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3}=\frac{A(s+3)+B(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$
$$\Rightarrow As+3A+Bs+B=4$$
$$\Rightarrow (A+B)s+3A+B-4=0$$
$$\Rightarrow A+B=0,\ 3A+B-4=0$$
$$\Rightarrow A=2,\quad B=-2$$

$$f(t)=\left(2e^{-t}-2e^{-3t}\right)u_S(t)$$

1.II.c. Tämäkin faktoroituu helposti. $F(s)=\dfrac{10s+8}{s(s+1)(s+2)}$. Tehdään osamurto mutta määritetään kertoimet vaihteen vuoksi *Heavisiden kaavalla*.

Kaava on aluksi hankalan tuntuinen, mutta se on helppo mnemonisoida. Jos on esimerkiksi

$$\frac{1}{(s-a)^n(s-b)}=\frac{A_0}{(s-a)^n}+\frac{A_1}{(s-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(s-a)}+\frac{B}{s-b},\quad n\in N$$

Yleisesti $A_i=\lim\limits_{s\to a}\left\{\dfrac{1}{i!}\dfrac{d^{(i)}}{ds^{(i)}}\left[(s-a)^n\dfrac{1}{(s-a)^n(s-b)}\right]\right\}$, B samalla tavalla.

Jos on siis moninkertaisia nimittäjän nollakohtia, täytyy osamurto tehdä näin, jotta onnistuisi. Kertoimien laskussa kertoma (!) ja derivaatan otto on huomioitava. Tehtävässä

$$F(s)=\frac{10s+8}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}$$

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{10s+8}{(s+1)(s+2)}=4$$

$$B=\lim_{s\to -1}\frac{10s+8}{s(s+2)}=2$$

$$C=\lim_{s\to -2}\frac{10s+8}{s(s+1)}=-6$$

$$f(t)=\left(4+2e^{-t}-6e^{-2t}\right)u_s(t)$$

Jos nimittäjän juuret ovat imaginäärisiä, menetellään kohtien d - f tapaan.

1.III. a, b, c. Löytyvät suoraan taulukoista.

Sitten kaikki ratkaisut peräjälkeen.

1.

I. Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

a. $F(s)=\int_0^\infty Ae^{-st}dt=-\frac{A}{s}\int_0^\infty -se^{-st}dt=-\frac{A}{s}\Big|_0^\infty e^{-st}=-\frac{A}{s}[0-1]=\frac{A}{s}$

a. Tapa2: $F(s)=\int_0^\infty A*1*e^{-st}dt=A\int_0^\infty 1*e^{-st}\,dt=-A|\frac{1}{s}e^{-st}=-\frac{A}{s}[0-1]=\frac{A}{s}$

b. $F(s)=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt=\ldots=\frac{1}{s+a}$

II. Kohdissa ii ja iii palautetaan mieliin Laplace-muuntaminen ja Laplace-käänteismuuntaminen. Laplace-muuntaminen tapahtuu muuntotaulukoissa olevien perusmuunnosten avulla. Aikatasossa oleva funktio, joka halutaan Laplace-tasoon, järjestetään sellaiseen muotoon, jonka komponentit löytyvät taulukoista.

a. $F(s)=\frac{4}{(s+3)^2}$

$f(t)=4te^{-3t}u_s(t)$

b. $F(s)=\frac{4}{(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+3}$

$$f(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-3t}\right)u_s(t)$$

c. $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} = \frac{4}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{-6}{s+2}$

$$f(t) = \left(4 + 2e^{-t} - 6e^{-2t}\right)u_s(t)$$

d. $F(s) = \frac{10(s+2)}{(s+2)^2+9} + \frac{30}{(s+2)^2+9}$

$$f(t) = 10e^{-2t}(\cos 3t + \sin 3t)u_s(t)$$

e. $F(s) = \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}}{s^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}$

$$f(t) = \left(\sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}t\right)u_s(t)$$

f. $F(s) = \frac{As+B}{s^2+16} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+20}$

$$16s + 16 \equiv A\left(s^3 + 4s^2 + 20s\right) + B\left(s^2 + 4s + 20\right) + C\left(s^3 + 16s\right) + D\left(s^2 + 16\right)$$

$$\Rightarrow A = 0, C = 0, B = 4, D = -4$$

$$F(s) = \frac{4}{s^2+16} - \frac{4}{(s+2)^2+16}$$

$$f(t) = \left[\left(1 - e^{-2t}\right)\sin 4t\right]u_s(t)$$

III.

a. $f(t) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot t + 8 \cdot \frac{t^2}{2} - 2 \cdot e^{-3t}$

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{8}{s^3} - \frac{2}{s+3} = \frac{9s^2 + 17s + 24}{s^3(s+3)}$$

b. $f(t) = 3 \cdot \frac{t^1 e^{-4t}}{1} + 2 \cdot 1 - 2 \cdot e^{-4t}$

$$F(s) = \frac{3}{(s+4)^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+4} = \frac{11s+32}{s(s+4)^2}$$

c. $f(t) = 4 \cdot \sin 2t + 5 \cdot \cos 2t$

$$F(s)=\frac{4\cdot 2}{s^2+4}+\frac{5s}{s^2+4}=\frac{5s+8}{s^2+4}$$

d. Jos $L\{f(t)u_S(t)\}=F(s)$, niin

$$L\{f(t-a)u_S(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

$$F(s)=\frac{2}{s^2}e^{-s}$$

e. $f(t)=4\cdot(e^{-3t}\sin 2t)+4\cdot(e^{-3t}\cos 2t)$

$$F(s)=\frac{4\cdot 2}{(s+3)^2+4}+\frac{4(s+3)}{(s+3)^2+4}=\frac{4s+20}{s^2+6s+13}$$

2. **a.** Laplace-muunnetaan prosessia kuvaava differentiaaliyhtälö termeittäin olettaen alkuarvot nolliksi (Tämä vastaa tilannetta, jossa systeemi on aluksi toimintapisteessä (y_s, u_s) , ja tulomuuttujaan tehdään askelmainen muutos. Lineaarisella järjestelmällä on aivan sama onko tasapainopiste aluksi (0,0) tai jokin muu arvopari. Vasteen dynamiikka on aivan vastaava):

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=3u(t)$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=\left(s^2+3s+2\right)Y(s)=3U(s)$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3}{s^2+3s+2}$$

b. $u(t)$ on yksikköimpulssifunktio $\delta(t)$.

$$U(s)=L\{\delta(t)\}=1$$

Sijoitetaan siirtofunktion ja herätteen lausekkeet $Y(s)$:n lausekkeeseen:

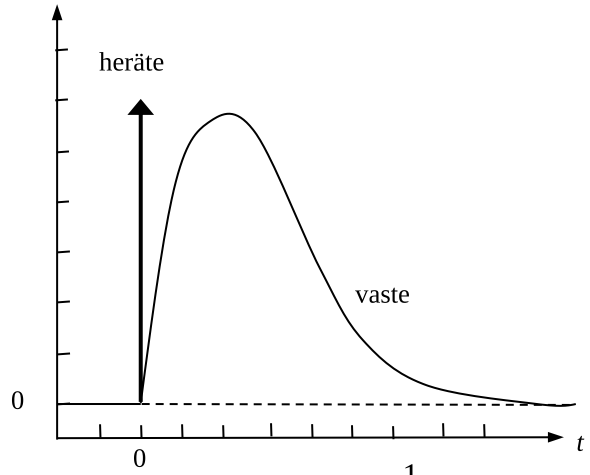
$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{3}{s^2+3s+2}\cdot 1=\frac{3}{s^2+3s+2}$$

Käänteismuunnetaan $Y(s)$ aikatasoon:

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3s+2}\right\}=3\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}$$

$$=\frac{3}{(2-1)}\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)=3\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)$$

Hahmotellaan herätteen ja vasteen käyttäytyminen aikatasossa:

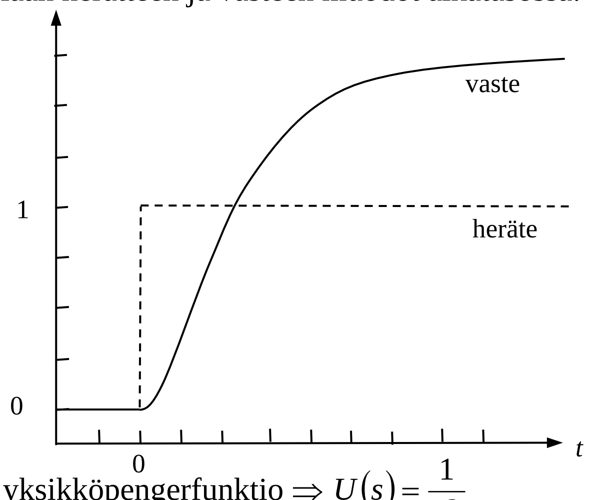


c. $u(t)$ on yksikköaskelfunktio $\Rightarrow U(s) = \dfrac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{3}{s\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} - 3e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Hahmotellaan herätteen ja vasteen muodot aikatasossa:



d. $u(t)$ on yksikköpengerfunktio $\Rightarrow U(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^2\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{3}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$Y(s)$:lle ei tässä tapauksessa löydy suoraa käänteismuunnosta taulukosta. Jaetaan se tekijöihin Heavisiden menetelmällä:

$$Y(s)=\frac{3}{s^2(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s^2}+\frac{A_2}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}$$

$$\begin{cases} A_1=\lim\limits_{s\to 0}\left\{\dfrac{3}{s^2(s+1)(s+2)}\cdot s^2\right\}=\lim\limits_{s\to 0}\left\{\dfrac{3}{(s+1)(s+2)}\right\}=\dfrac{3}{1\cdot 2}=\dfrac{3}{2} \\ A_2=\lim\limits_{s\to 0}\left\{\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{3}{s^2(s+1)(s+2)}\cdot s^2\right]\right\}=\lim\limits_{s\to 0}\left\{\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{3}{(s+1)(s+2)}\right]\right\} \\ \quad =\lim\limits_{s\to 0}\left\{-\dfrac{3(2s+3)}{(s^2+3s+2)^2}\right\}=-\dfrac{3^2}{2^2}=-\dfrac{9}{4} \\ B=\lim\limits_{s\to -1}\left\{\dfrac{3}{s^2(s+1)(s+2)}\cdot(s+1)\right\}=\lim\limits_{s\to -1}\left\{\dfrac{3}{s^2(s+2)}\right\}=3 \\ C=\lim\limits_{s\to -2}\left\{\dfrac{3}{s^2(s+1)(s+2)}\cdot(s+2)\right\}=\lim\limits_{s\to -2}\left\{\dfrac{3}{s^2(s+1)}\right\}=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{3}{2}\frac{1}{s^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{s}+3\frac{1}{s+1}-\frac{3}{4}\frac{1}{s+2}$$

Käänteismuunnetaan vaste nyt termeittäin:

$$\Rightarrow y(t)=\frac{3}{2}t-\frac{9}{4}+3e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-2t}$$

3. **a.**

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -6 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}4\\ 10\end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

Differentiaaliesityksessä ovat mukana ainoastaan heräte $u(t)$ ja vaste $y(t)$. Tilaesityksessä ovat näiden lisäksi systeemin tilasuureet $x_1(t)$ ja $x_2(t)$, joista differentiaaliesitystä muodostettaessa halutaan tietysti päästä eroon. Kirjoitetaan aluksi matriisit auki:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ 10\end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \end{cases}$$

Käyttämällä matriisien yhteen- ja kertolaskusääntöjä saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=-5x_1(t)+x_2(t)+4u(t) \\ \dot{x}_2(t)=-6x_1(t)+10u(t) \\ y(t)=x_1(t) \end{cases}$$

Sijoitetaan aluksi viimeinen yhtälö ensimmäiseen ja toiseen

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -5y(t) + x_2(t) + 4u(t) \\ \quad \dot{x}_2(t) = -6y(t) + 10u(t) \end{cases}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä $x_2(t)$ ja derivoidaan se:

$$x_2(t) = \dot{y}(t) + 5y(t) - 4u(t)$$
$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) - 4\dot{u}(t)$$

Sijoitetaan tämä yhtälöryhmän jälkimmäiseen yhtälöön ja saadaan differentiaaliyhtälö:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) - 4\dot{u}(t) = -6y(t) + 10u(t)$$

Järjestetään yhtälö vielä oikein:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 4\dot{u}(t) + 10u(t)$$

Siirtofunktio saadaan Laplace-muuntamalla edellinen

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = 4sU(s) + 10U(s)$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s+10}{s^2+5s+6}$$

b.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

Lukijan mielenkiinnon säilyttämiseksi kuljetaan tämän tilaesityksen kanssa toista reittiä ja muodostetaan ensin siirtofunktio kaavan

$$G(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}$$

avulla.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2×2-matriisi voidaan kääntää helposti liittomatriisin avulla:

$$\mathbf{A}^{-1} = \det^{-1}\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}\mathbf{A} = \det^{-1}\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)}\cdot\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

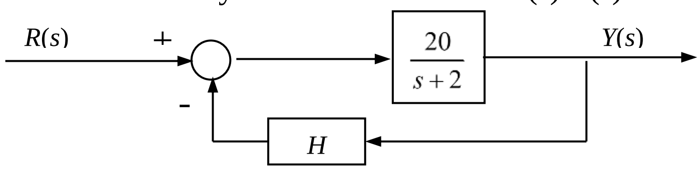
Sijoitetaan käännetty (s**I**-**A**)$^{-1}$-matriisi paikalleen ja pyöritetään eteenpäin:

$$G(s)=\frac{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)}=\frac{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+3 \\ 2(s+2) \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)}$$
$$=\frac{2s+6+2s+4}{(s+2)(s+3)}=\frac{4s+10}{(s+2)(s+3)}$$

Siirtofunktiosta saadaan differentiaaliyhtälö kätevästi Laplace-käänteismuuntamalla:

$$G(s)=\frac{4s+10}{(s+2)(s+3)}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$
$$s^2Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=4sU(s)+10U(s)$$
$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=4\dot{u}(t)+10u(t)$$

4. Lasketaan alla olevan kuvan systeemin siirtofunktio $Y(s)/R(s)$.



(Huomaa, että vaikka H on tässä skalaari, se voisi olla mielivaltainen siirtofunktio $H(s)$.)

Merkitään myötähaaran siirtofunktiota $G(s)$:llä

$$G(s)=\frac{20}{s+2}$$

Kuvasta saadaan yhtälöt erosuureelle $E(s)$ ja ulostulolle $Y(s)$:

$$E(s)=R(s)-H(s)Y(s)$$
$$Y(s)=G(s)E(s)$$

Sijoitetaan ylempi yhtälö alempaan ja ratkaistaan kokonaissiirtofunktio:

$$Y(s)=G(s)\big(R(s)-H(s)Y(s)\big)=G(s)R(s)-G(s)H(s)Y(s)$$
$$\Rightarrow Y(s)+G(s)H(s)Y(s)=G(s)R(s)$$
$$\Leftrightarrow \big(1+G(s)H(s)\big)Y(s)=G(s)R(s)$$
$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=G_{tot}(s)$$

Saatiin kaava negatiivisesti takaisinkytketyn järjestelmän kokonaissiirtofunktiolle. Tulos on syytä osata ja myös johtamisen pitää onnistua.

Jos H = 0.4, niin $G_{tot}(s) = \frac{20}{s+10} \Rightarrow$ napa s = -10.

Jos H = 0.9, niin $G_{tot}(s) = \frac{20}{s+20} \Rightarrow$ napa s = -20.

Lasketaan impulssivasteet:
impulssin (eli Diracin deltafunktio $\delta(t)$) Laplace-muunnos $R(s) = 1$

$\Rightarrow \quad Y(s) = G_{tot}(s)R(s) = \frac{20}{s+10} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 20\frac{1}{s+10} = 20e^{-10t}$

$Y(s) = G_{tot}(s)R(s) = \frac{20}{s+20} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 20\frac{1}{s+20} = 20e^{-20t}$

Lasketaan askelvasteet:

askeleen (eli yksi, kun aika suurempi kuin nolla) Laplace-muunnos $R(s) = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow Y(s) = G_{tot}(s)R(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{20}{s+10} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 20\frac{1}{s(s+10)} = \frac{20}{10}\left(1-e^{-10t}\right) = 2-2e^{-10t}$

$Y(s) = G_{tot}(s)R(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{20}{s+20} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 20\frac{1}{s(s+20)} = \frac{20}{20}\left(1-e^{-20t}\right) = 1-e^{-20t}$

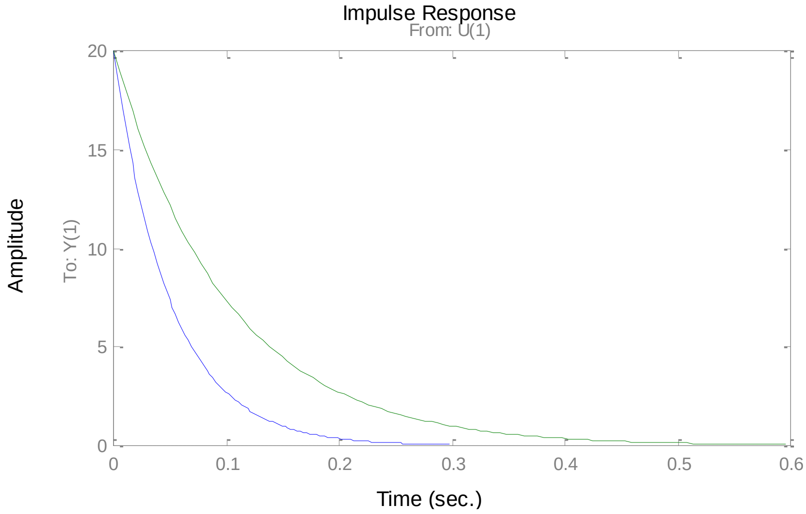
Tehdään sama vielä MATLABilla:

Polynomien kertoimet syötetään MATLABiin vektorimuodossa .

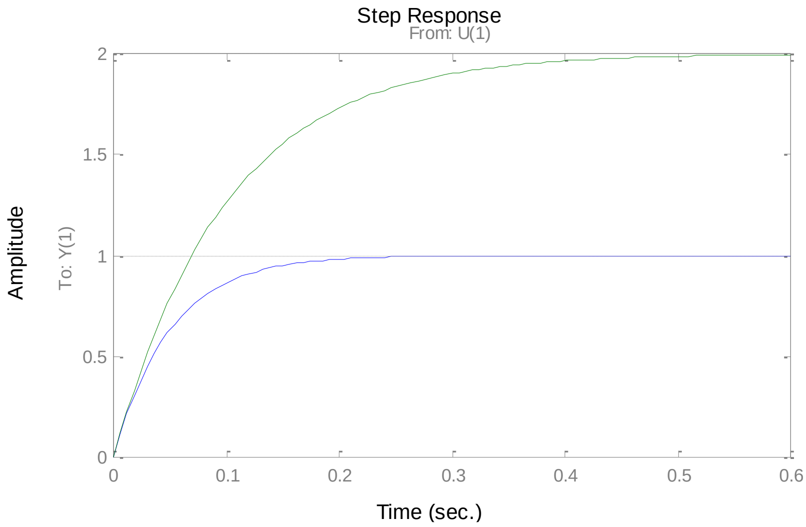
```
>> G=tf(20,[1 2])
Transfer function:
 20
-----
s + 2
>> H=0.9; Gtot=feedback(G,H)
Transfer function:
  20
------
s + 20
```

Simuloidaan vasteet:

```
>> impulse(Gtot);hold on;impulse(Gtot2)
```



>> step(Gtot,0.6);hold on;step(Gtot2,0.6)



5. * Muodostetaan osa-ainetaseet ideaalisekoittimille vihjeen mukaisesti

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(V_1 C_1(t)\right)}{dt} = QC_i(t) - QC_1(t) \\ \dfrac{d\left(V_2 C_2(t)\right)}{dt} = QC_1(t) - QC_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 \dfrac{dC_1(t)}{dt} = V_1 \dot{C}_1(t) = Q(C_i(t) - C_1(t)) \\ V_2 \dfrac{dC_2(t)}{dt} = V_2 \dot{C}_2(t) = Q(C_1(t) - C_2(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = \dfrac{Q}{V_1}(C_i(t) - C_1(t)) \\ \dot{C}_2(t) = \dfrac{Q}{V_2}(C_1(t) - C_2(t)) \end{cases}$$

Sijoitetaan numeroarvot

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = 2(C_i(t) - C_1(t)) = 2C_i(t) - 2C_1(t) \\ \dot{C}_2(t) = 5(C_1(t) - C_2(t)) = 5C_1(t) - 5C_2(t) \end{cases}$$

Edellä johdetut yhtälöt on helppo esittää tilaesityksenä, jonka tiloilla on fysikaalinen merkitys. Valitsemalla herätteeksi $u(t) = C_i(t)$, lähtösuureeksi $y(t) = C_2(t)$ ja tiloiksi $x_1(t) = C_1(t)$ ja $x_2(t) = C_2(t)$ saadaan tilaesitykseksi

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2u(t) - 2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1(t) - 5x_2(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Siirtofunktion voi ratkaista useilla eri menetelmillä, esimerkiksi äsken ratkaistusta tilaesityksestä kaavalla:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Määritetään siirtofunktio tällä kertaa niin, että Laplace-muunnetaan prosessiyhtälöt, hävitetään muut kuin tulo- ja lähtösuureet ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä lähtö- ja tulosuureiden suhde.

- $U(s) = C_i(s)$ ja $Y(s) = C_2(s)$. Eliminoidaan $C_1(s)$.
- $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{C_2(s)}{C_i(s)}$

$$\begin{cases} sC_1(s) = 2C_i(s) - 2C_1(s) \\ sC_2(s) = 5C_1(s) - 5C_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(s) = \dfrac{2}{s+2} C_i(s) \\ sC_2(s) = 5C_1(s) - 5C_2(s) \end{cases}$$

Sijoitetaan ylempi yhtälö alempaan:

$$sC_2(s) = 5\frac{2}{s+2}C_i(s) - 5C_2(s)$$

$$(s+5)C_2(s) = \frac{10}{s+2}C_i(s)$$

$$G(s) = \frac{C_2(s)}{C_i(s)} = \frac{10}{(s+2)(s+5)}$$

a. Yksikköimpulssivaste: $C_i(s) = 1$

$$C_2(t) = L^{-1}\{C_2(s)\} = L^{-1}\{G(s)C_i(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{10}{(s+2)(s+5)} \cdot 1\right\} = \frac{10}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\right)$$

b. Yksikköaskelvaste: $C_i(s) = \frac{1}{s}$

$$C_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{10}{(s+2)(s+5)} \cdot \frac{1}{s}\right\} = 1 - \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t}$$

c. Yksikköaskelvasteen raja-arvo, kun aika lähestyy ääretöntä:

$$\lim_{t\to\infty}\{C_2(t)\} = \lim_{t\to\infty}\left\{1 - \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t}\right\} = 1$$

Sama tulos saadaan myös loppuarvoteoreemalla:

$$\lim_{t\to\infty}\{C_2(t)\} = \lim_{s\to 0}\{C_2(s) \cdot s\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{10}{(s+2)(s+5)} \cdot \frac{1}{s} \cdot s\right\} = \frac{10}{10} = 1$$

d. Askelherätteen ja vasteen loppuarvot ovat samat (c-kohdan perusteella), joten prosessin staattinen vahvistus on yksi. Tämä tarkoittaa tämän esimerkin tapauksessa sitä, että kun sisääntulovirtauksen konsentraatio muutetaan askeleellisesti uuteen arvoon, poistovirtauksen konsentraatio muuttuu ennen pitkää samaksi.

Voidaan luonnollisesti myös tarkistaa staattisen vahvistuksen kaavalla:

$$\bar{k} = \lim_{s\to 0}\{G(s)\} = 1$$

e. Painofunktio on sama kuin yksikköimpulssivaste. Laskettiin a-kohdassa:

$$g(t) = \frac{10}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\right)$$