



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Vättö

Harjoitukset, Viikko 5A, 2024



Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Näytä, että matriisi

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

on positiivisesti definiitti. (a) Laskemalla ominaisarvot ja (b) käyttäen Sylvesterin kriteeriä.

TEHTÄVÄ M2 Funktiolla $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y$ on yksi ääriarvo, suhteellinen minimi pisteessä $(-1, 1)$. Onko kyseessä absoluuttinen minimi?

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Etsi seuraaville funktioille f ne pisteet, joissa $\text{grad } f = 0$, ja tutki lokaalin ääriarvon esiintymistä:

a) $y^4 + x^2 - 2xy$, b) $x^3 + xy + y^2 - 3x - 9y$, c) $x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2$.

TEHTÄVÄ J2 Etsi seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetussa joukossa:

a) $xy + x - y$, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y + 1 \geq 0, x - y - 1 \leq 0\}$;

b) $x^2 - 2y^2 - xy - x$, $\{(x, y) \mid x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1\}$;

c) $3 + x - x^2 - y^2$, $\{(x, y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Osoita, että funktiolla $f(x, y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$ ei ole ääriarvoa origossa, vaikka sen rajoittumalla jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on suhteellinen minimi.

TEHTÄVÄ K2 Määritä funktion

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

suurin ja pienin arvo joukossa

a) $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$, b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

mikäli nämä ovat olemassa.

Vastauksia

TEHTÄVÄ M2

V: 1 On. Siirry napakoordinaatteihin ja toteaa, että $f > 0$ ainakin, kun etäisyys origosta on ≥ 3 .

TEHTÄVÄ J2

V: 2 a) $1, -\frac{7}{11} - \sqrt{2}$; b) $\frac{8}{17}, -4$; c) $\frac{13}{4}$.

TEHTÄVÄ K1

V: 3 $f(x, kx) = 2x^4 - 3kx^3 + k^2x^2, f(0, y) = y^2$; funktio saa paraabelien $y = x^2, y = 2x^2$ välissä negatiivisia arvoja, muualla paraabelin ulkopuolella positiivisia.

TEHTÄVÄ K2

V: 4 a) Ei ole; b) $1, -1$; c) ei ole.