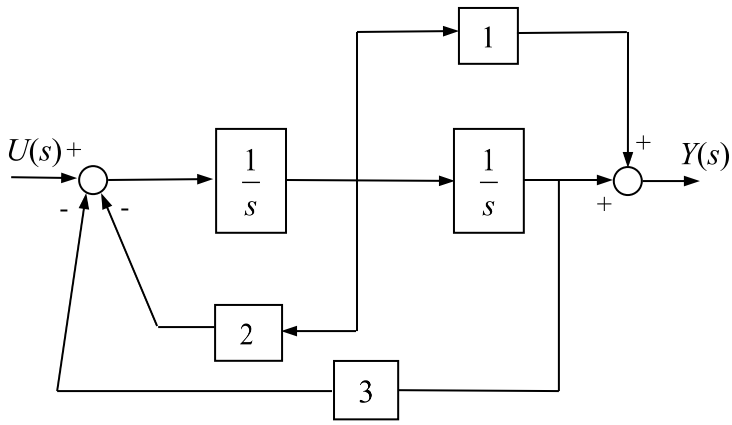
ELEC-C1230 Säätötekniikka
4. laskuharjoitus
Vastaukset

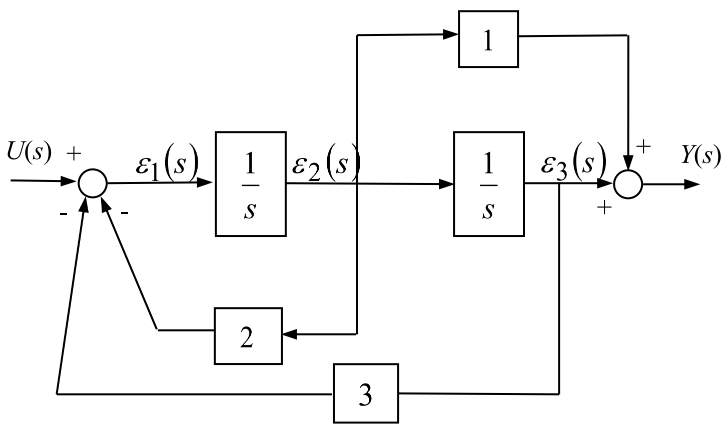
1. Määritä alla olevan järjestelmän polynomimuotoinen kokonaissiirtofunktio. (Siirtofunktion osoittaja ja nimittäjä ovat s:n potensseja.)



Lohkokaaviossa on limittäisiä rakenteita, joten kokonaissiirtofunktiota määritettäessä on joko turvauduttava matemaattiseen ratkaisuun tai muokattava lohkokaaviomuunnosten avulla lohkokaaviota siten, että limittäisistä rakenteista päästään eroon.

Kokonaissiirtofunktion ratkaiseminen välisuureita käyttäen:

Valitaan välisuureet $\varepsilon_1(s)$, $\varepsilon_2(s)$ ja $\varepsilon_3(s)$ kuvan esittämällä tavalla ($\varepsilon = epsilon$). (Muutkin valinnat ovat mahdollisia, esimerkiksi $\varepsilon_3(s)$:n tilalle yhtälöissä voisi kirjoittaa suoraan $1/s \cdot \varepsilon_2$ käyttämättä kolmatta välisuuretta.)



Muodostetaan yhtälöt jokaiselle välisuureelle $\varepsilon_i(s)$ ja lähtösuureelle $Y(s)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1(s) = U(s) - 2\varepsilon_2(s) - 3\varepsilon_3(s) \\ \varepsilon_2(s) = \frac{1}{s}\varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_3(s) = \frac{1}{s}\varepsilon_2(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s}\varepsilon_1(s) = \frac{1}{s^2}\varepsilon_1(s) \\ Y(s) = \varepsilon_2(s)\cdot 1 + \varepsilon_3(s) = \varepsilon_2(s) + \varepsilon_3(s) \end{cases}$$

Halutaan muodostaa $G_{TOT} = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Eliminoidaan $\varepsilon_2(s)$ ja $\varepsilon_3(s)$ sijoittamalla ne $\varepsilon_i(s)$:n lausekkeeseen.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1(s) = U(s) - \frac{2}{s}\varepsilon_1(s) - \frac{3}{s^2}\varepsilon_1(s) \\ Y(s) = \frac{1}{s}\varepsilon_1(s) + \frac{1}{s^2}\varepsilon_1(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\varepsilon_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}\right)\varepsilon_1(s) = U(s) \\ Y(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\varepsilon_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}\right)}U(s) \\ Y(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\varepsilon_1(s) \end{cases}$$

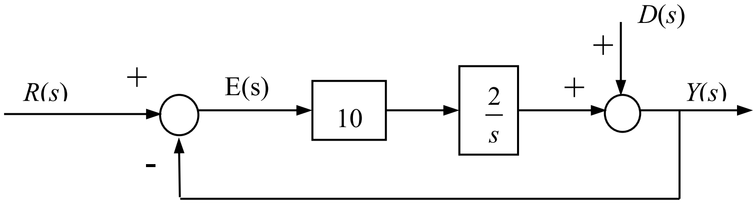
Eliminoidaan $\varepsilon_1(s)$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}}U(s) = \frac{\frac{s+1}{s^2}}{\frac{s^2+2s+3}{s^2}}U(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+3}U(s)$$

Saadaan kokonaissiirtofunktio:

$$G_{TOT}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+2s+3}$$

2. Laske alla olevan kuvan järjestelmälle $y(t)$, kun referenssi $r(t) = 5.0u_s(t)$ ja häiriö $d(t) = 5.0(\cos(t))u_s(t)$.



Suoraan lohkokaaviosta:

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - Y(s) \\ Y(s) = \dfrac{20}{s}E(s) + D(s) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow E(s) = R(s) - \left[\frac{20}{s}E(s) + D(s)\right] \Rightarrow \left(1 + \frac{20}{s}\right)E(s) = R(s) - D(s)$$

$$\Leftrightarrow E(s) = \frac{R(s) - D(s)}{1 + 20/s}$$

Eliminoidaan *E(s)*

Tapa 1: sijoitetaan *E(s)* *Y(s)* lausekkeeseen

$$Y(s) = \frac{20}{s}E(s) + D(s) = \frac{20}{s}\frac{R(s) - D(s)}{1 + 20/s} + D(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{20}{s}\frac{R(s) - D(s)}{\frac{s+20}{s}} + D(s) = \frac{20}{s}\frac{s\,(R(s) - D(s))}{s+20} + D(s) = \frac{20s\,(R(s) - D(s))}{s(s+20)} + D(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{20s\,(R(s) - D(s))}{s(s+20)} + \frac{D(s)s(s+20)}{s(s+20)} = \frac{20s\,(R(s) - D(s)) + D(s)s(s+20)}{s(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{20R(s)s - 20D(s)s + D(s)s^2 + 20D(s)s}{s(s+20)} = \frac{20R(s)s + D(s)s^2}{s(s+20)} = \frac{s(20R(s) + D(s)s)}{s(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{20R(s) + D(s)s}{(s+20)} = \frac{sD(s) + 20R(s)}{s+20}$$

Tapa 2: sijoitetaan *E(s)* lausekkeeseen *E(s)* = *R(s)* – *Y(s)* ja ratkaistaan *Y(s)*

$$Y(s) = R(s) - E(s) = R(s) - \frac{R(s) - D(s)}{1 + 20/s} = \frac{(1 + 20/s)R(s)}{1 + 20/s} - \frac{R(s) - D(s)}{1 + 20/s}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{(1 + 20/s)R(s) - R(s) + D(s)}{1 + 20/s} = \frac{R(s) + (20/s)R(s) - R(s) + D(s)}{1 + 20/s}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{(20/s)R(s) + D(s)}{1 + 20/s} = \frac{\dfrac{20R(s) + sD(s)}{s}}{\dfrac{s + 20}{s}} = \frac{sD(s) + 20R(s)}{s + 20}$$

.

Laplace-muunnoksen avulla saadaan $D(s)$ ja $R(s)$ (taulukosta):

$$D(s) = 5\frac{s}{s^2 + 1}, \quad R(s) = 5\frac{1}{s} \quad .$$

D(s) ja *R(s)* voidaan vastaavasti laskea määritelmän

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad ,$$

jossa *f(t)* vastaa *d(t)* ja *r(t)* funktioita.

Tällöin saadaan vasteen Laplace-muunnokseksi:

$$Y(s) = \frac{\dfrac{5s^2}{s^2 + 1} + \dfrac{100}{s}}{s + 20} = \frac{\dfrac{5s^3 + 100(s^2 + 1)}{s(s^2 + 1)}}{s + 20}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{5s^3 + 100(s^2 + 1)}{s(s^2 + 1)(s + 20)} = \frac{5s^3 + 100s^2 + 100}{s(s^2 + 1)(s + 20)} \quad .$$

Tehdään osamurtokehitelmä:

$$\frac{5s^3+100s^2+100}{s(s^2+1)(s+20)} \equiv \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}+\frac{D}{s+20}=\frac{A(s^2+1)(s+20)+(Bs+C)s(s+20)+Ds(s^2+1)}{s(s^2+1)(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow = \frac{A(s^2+1)(s+20)+(Bs+C)s(s+20)+Ds(s^2+1)}{s(s^2+1)(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow = \frac{A(s^3+20s^2+s+20)+(Bs+C)(s^2+20s)+Ds^3+Ds}{s(s^2+1)(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow = \frac{A(s^3+20s^2+s+20)+(Bs^3+20Bs^2+Cs^2+20Cs)+Ds^3+Ds}{s(s^2+1)(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow = \frac{As^3+20As^2+As+20A+Bs^3+20Bs^2+Cs^2+20Cs+Ds^3+Ds}{s(s^2+1)(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5s^3+100s^2+100}{s(s^2+1)(s+20)} \equiv \frac{As^3+20As^2+As+20A+Bs^3+20Bs^2+Cs^2+20Cs+Ds^3+Ds}{s(s^2+1)(s+20)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=5 \\ 20A+20B+C=100 \\ A+20C+D=0 \\ 20A=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=5/401 \\ C=-100/401 \\ D=-5/401 \end{cases}$$

Tällöin saadaan:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}+\frac{D}{s+20}=\frac{5}{s}+\frac{5}{401}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{100}{401}\cdot\frac{1}{s^2+1}-\frac{5}{401}\cdot\frac{1}{s+20},$$

josta edelleen Laplace-käänteismuuntamalla:

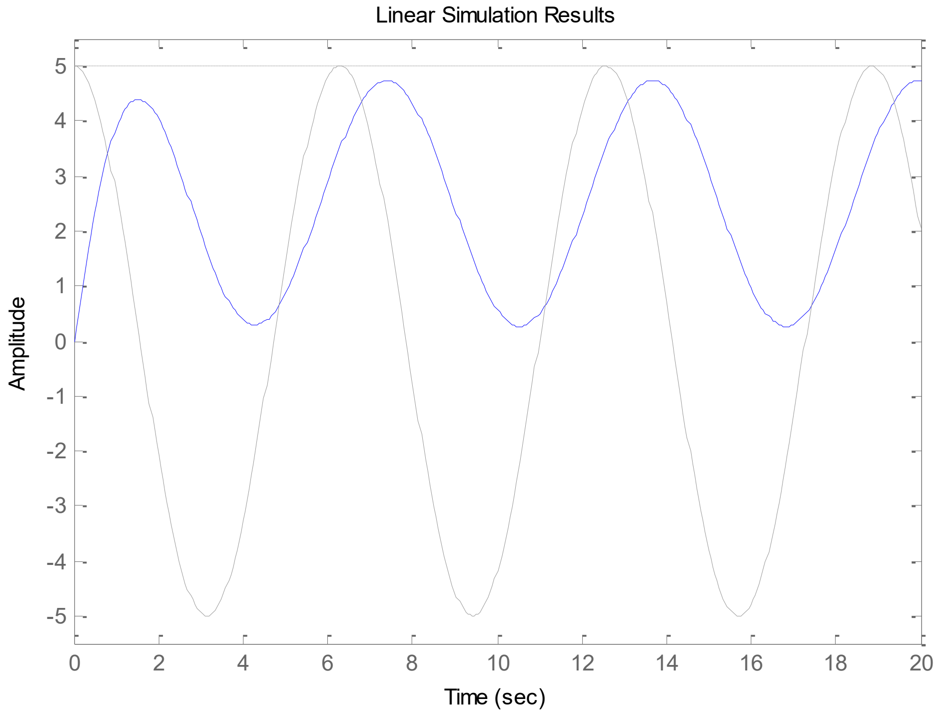
$$y(t)=5+\frac{5}{401}\cos(t)-\frac{100}{401}\sin(t)-\frac{5}{401}e^{-20t}$$

Katsotaanpa samaa Matlabilla:

```
>> G = tf({[1 0] 20},{[1 20] [1 20]})
 Transfer function from input 1 to output:
  s
------
s + 20
 Transfer function from input 2 to output:
  20
------
s + 20
```

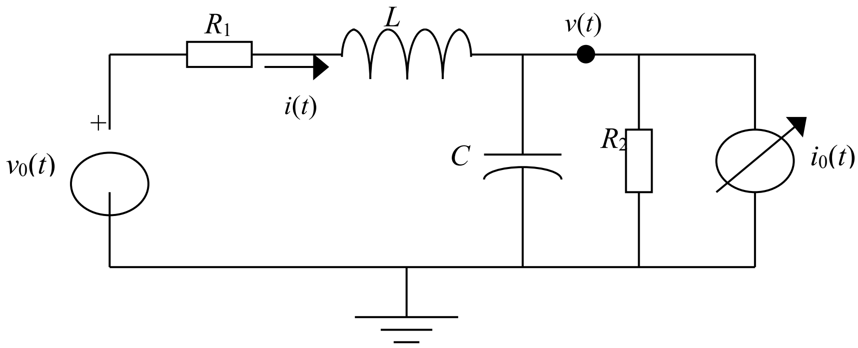
Simuloidaan vaste `lsim`-käskyllä: (Matlab: help lsim)

```
>> t = 0:0.05:20; r = 5*ones(1,401); d = 5*cos(t);
>> lsim(G,[d;r],t);
```



Kuva 1. Systeemin vaste (sininen) ja systeemiin syötetty heräte (r(t) ja d(t)).

3. Käsitellään alla olevan kuvan mukaista sähköpiiriä. Valitse sopivat tilat ja muodosta tilamalli siten, että ulostulona on jännite $v(t)$ ja sisäänmenoina $v_0(t)$ ja $i_0(t)$. Laske jännite ajan funktiona, kun kaikki mallin vakiot ovat ykkösiä ja herätteet ovat $v_0(t) = u_s(t)$ ja $i_0(t) = u_s(t - 1)$.



inputit (u): $v_0(t)$ ja $i_0(t)$, outputit (y): $v(t)$ (MISO systeemi, MISO = multiple input single output)

Jännite käämin yli: $v_L = L\dot{i}$

Jännite vastuksen 1 yli: $v_{R_1} = R_1 i$

Kirchhoffin jännitelain mukaan: $v(t) = v_0(t) - v_L(t) - v_{R_1}(t) \Rightarrow v(t) = v_0(t) - L\dot{i}(t) - R_1 i(t)$

Virta kondensaattorin läpi: $i_c = C\dot{v}$

Virta vastuksen 2 läpi: $i_{R_2} = \dfrac{v}{R_2}$

Kirchhoffin virtalain mukaan: $i_C(t) + i_{R_2}(t) = i(t) + i_0(t) \Rightarrow C\dot{v}(t) + \dfrac{v(t)}{R_2} = i(t) + i_0(t)$

Valitaan tiloiksi $v(t)$ ja $i(t)$:

$$\begin{cases} \dot{i}(t) = -(R_1 / L)i(t) - (1/L)v(t) + (1/L)v_0(t) \\ \dot{v}(t) = (1/C)i(t) - (1/R_2C)v(t) + (1/C)i_0(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

Lisää tilayhtälöiden dimensioista (huom. lineaariset yhtälöt):
https://en.wikipedia.org/wiki/State-space_representation#Linear_systems

Lasketaan vastaava siirtofunktio, kun R_1, R_2, C ja L saavat arvon yksi:

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\left[s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \left[s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \left[\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}$$

$$\Rightarrow adj(sI-A) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(sI-A) = (s+1)(s+1) - (-1*1) = s^2+2s+1+1 = s^2+2s+2$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+2s+2}\begin{bmatrix} 1 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \frac{V_0+(s+1)I_0}{s^2+2s+2}$$

Adjungoitu matriisi (liittomatriisi) muodostetaan korvaamalla alkuperäisen matriisin alkiot niiden alideterminanteilla, vaihtamalla niistä joka toinen vastaluvukseen ja ottamalla näin saadusta matriisista transpoosi.

Laplace-muunnetaan herätteet: $V_0(s) = 1/s$ ja $I_0(s) = e^{-s}/s$.

Lasketaan vaste:

$$Y(s) = \frac{V_0+(s+1)I_0}{s^2+2s+2} = \frac{V_0}{s^2+2s+2} + \frac{(s+1)I_0}{s^2+2s+2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+2s+2)} + \frac{e^{-s}}{s}\frac{s+1}{(s^2+2s+2)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} + e^{-s}\left(\frac{D}{s} + \frac{Es+F}{s^2+2s+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A(s^2+2s+2)+(Bs+C)s}{s(s^2+2s+2)} + e^{-s}\left(\frac{D(s^2+2s+2)+(Es+F)s}{s(s^2+2s+2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{As^2+2As+2A+Bs^2+Cs}{s(s^2+2s+2)} + e^{-s}\left(\frac{Ds^2+2Ds+2D+Es^2+Fs}{s(s^2+2s+2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{s(s^2+2s+2)} + e^{-s}\frac{s+1}{s(s+2s+2)} \equiv \frac{As^2+2As+2A+Bs^2+Cs}{s(s^2+2s+2)} + e^{-s}\left(\frac{Ds^2+2Ds+2D+Es^2+Fs}{s(s^2+2s+2)}\right)$$

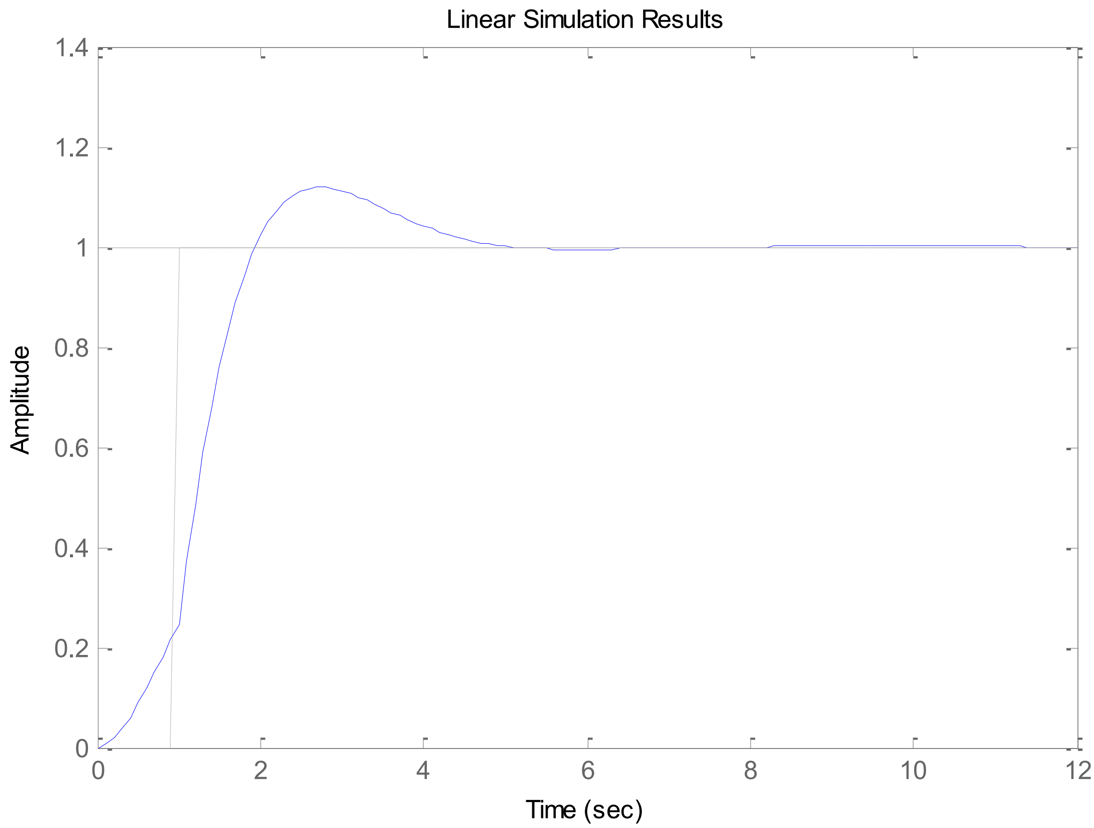
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \text{ja} \begin{cases} D+E=0 \\ 2D+F=1 \\ 2D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=-1/2 \\ C=-1 \end{cases} \text{ja} \begin{cases} D=1/2 \\ E=-1/2 \\ F=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1/2}{(s+1)^2+1}\right)+e^{-s}\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\sin(t)\right)+\frac{1}{2}\left(1-e^{-t+1}\cos(t-1)+e^{-t+1}\sin(t-1)\right)u_s(t-1)$$

Simuloidaan Matlabilla:

```
>> G = tf({1 [1 1]},{[1 2 2] [1 2 2]});
>> t = 0:0.1:12;lsim(G,[ones(1,121);zeros(1,10) ones(1,111)],t)
```



Kuva 2. Sähköpiirin vaste (sininen) ja heräte (harmaa).

4. * Laske seuraavaa tilamallia vastaava siirtofunktio:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$adj(A) = C^T, \text{ jossa}$$
$$C = \text{kofaktorimatriisi}$$

Vastaava siirtofunktio: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

$$\Rightarrow s\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -2 \\ -1 & s-1 & 0 \\ 0 & -2 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \{(s-1)\cdot[(s-1)(s-1) - (-2\cdot 0)]\} - \{0\cdot[(-1\cdot(s-1)) - 0]\} + \{-2\cdot[(-1\cdot(-2)) - (0\cdot(s-1))]\}$$

$$\Leftrightarrow \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s-1)^3 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) = s^3 - 3s^2 + 3s - 5$$

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & s-1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ s-1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \text{ jossa}$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix}, |A_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix}, |A_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & s-1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix}, |A_{22}| = \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix}, |A_{23}| = \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ s-1 & 0 \end{vmatrix}, |A_{32}| = \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, |A_{33}| = \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & |A_{13}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & -|A_{23}| \\ |A_{31}| & -|A_{32}| & |A_{33}| \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & s-1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ s-1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2-2s+1 & s-1 & 2 \\ 4 & s^2-2s+1 & 2s-2 \\ 2s-2 & 2 & s^2-2s+1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} s^2-2s+1 & s-1 & 2 \\ 4 & s^2-2s+1 & 2s-2 \\ 2s-2 & 2 & s^2-2s+1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} s^2-2s+1 & 4 & 2s-2 \\ s-1 & s^2-2s+1 & 2 \\ 2 & 2s-2 & s^2-2s+1 \end{bmatrix}$$

Kun muistetaan, että $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\dfrac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$, niin saadaan siirtofunktioksi:

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\frac{1}{s^3-3s^2+3s-5}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2-2s+1 & 4 & 2s-2 \\ s-1 & s^2-2s+1 & 2 \\ 2 & 2s-2 & s^2-2s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{s^2-2s+1}{s^3-3s^2+3s-5}$$

Sama homma Matlabilla:

```
>> A = [1 0 2; 1 1 0; 0 2 1]; B = [1 0 0]'; C = [1 0 0]; D = 0;
>> [num,den] = ss2tf(A,B,C,D)

num =

         0    1.0000   -2.0000    1.0000


den =

    1.0000   -3.0000    3.0000   -5.0000
```

Sama tulos. Toinen tapa:

```
>> A = [1 0 2; 1 1 0; 0 2 1]; B = [1 0 0]'; C = [1 0 0]; D = 0;
>> G1=ss(A,B,C,D); G2=tf(G1); [num,den]=tfdata(G2,'v');
```

Adjungoitu matriisi: https://fi.wikipedia.org/wiki/Liittomatriisi

Lisää matriisien laskusäännöistä:
https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/matrixcookbook.pdf