



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Vättö

Harjoitukset, Viikko 6B, 2024



Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Jos mahdollista, vaihda muuttujien integroimisjärjestys integraalissa

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy.$$

Piirrä kuva!

TEHTÄVÄ M2 Määritä tasointegraali $\iint_A dA$, missä A on suorakulmio $-1 \leq x \leq 3$, $-4 \leq y \leq 1$.

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavat integraalit:

a) $\iint_A x^2 da$, $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;

b) $\iint_A \frac{x}{y} da$, $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$.

TEHTÄVÄ J2 Olkoon $a > 0$, $b > 0$, $A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Laske epäoleellinen integraali

$$\iint_A e^{-(ax+by)^2} da$$

sijoituksella $u = ax + by$, $v = y/x$.

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Tutki, millä muuttujan t arvoilla funktio

$$f(t) = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^2 \int_{z=2}^t xy(z-1) \ln(1+z^4) dx dy dz$$

saa pienimmän arvonsa.

TEHTÄVÄ K2 Laske sopivan muuttujanvaihdon avulla integraali

$$\iint_A (2x+3y)^2 (x-5y)^2 dx dy, \quad \text{missä } A = \{ (x, y) \mid |2x+3y| \leq 4, |x-5y| \leq 3 \}.$$

Haaste

Tässä tehtävässä tarvitaan kaavaa

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t) dx;$$

kts. MS-A0101:n materiaali soveltuvin osin.

Laske integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

käyttämällä integraalin derivointia parametrin suhteen seuraavalla tavalla: Osoita, että funktion

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx$$

derivaatta on $-1/(1+t^2)$, joten $F(t)$ voidaan laskea integroimalla, kun lisäksi tiedetään $F(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Tämän avulla saadaan $F(0)$.

Huom: Välivaiheet vaatisivat tarkempia perusteluja, koska kyseessä on epäoleellinen integraali. Vastaus on kuitenkin oikein, joten voit laskea ilman perusteluja (hieman kyseenalainen päättely?). Kurssilla MS-A0101 johdettiin (olennaisilta osin) kaava

$$\int_0^\infty e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \text{kun } a < 0.$$

Vastauksia

TEHTÄVÄ J1

$$V: 1 \quad a) \frac{3}{1} \quad b) 0.$$

TEHTÄVÄ J2

$$V: 2 \quad \frac{2ab}{1}$$

TEHTÄVÄ K1

$$V: 3 \quad t = 1.$$

TEHTÄVÄ K2

$$V: 4 \quad 768/13.$$