MS-A0305 19.10.2023, ratkaisut

Tehtävä 1

> $int\left((8+4\cdot\cos(\varphi))\cdot r\cdot r^2\cdot\sin(\varphi), r=0..3\right)$

$$\frac{81\ (8+4\cos(\varphi))\ \sin(\varphi)}{4} \tag{1.1}$$

> $int\left(\%, \varphi=0..\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$\frac{405}{2} \tag{1.2}$$

> $T := int(\%, \theta=0..2\cdot\mathrm{Pi})$

$$T := 405\,\pi \tag{1.3}$$

Tehtävä 2

> $x := t \to 4\cdot\cos(t)$

$$x := t \mapsto 4\cdot\cos(t) \tag{2.1}$$

> $y := t \to 4\cdot\sin(t)$

$$y := t \mapsto 4\cdot\sin(t) \tag{2.2}$$

> $-3\cdot y(t)\cdot x'(t) + 3\cdot x(t)\cdot y'(t)$

$$48\sin(t)^2 + 48\cos(t)^2 \tag{2.3}$$

> $simplify(\%)$

$$48 \tag{2.4}$$

> $int\left(\%, t=0..\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$24\,\pi \tag{2.5}$$

Potentiaalia ei ole, koska osittaisderivaattaehto ei toteudu: $-3 \neq 3$. Myös laskuyritys johtaa ristiriitaan.
Periaatteessa voi myös todeta, että koordinaattiakseleita pitkin samoilla alku- ja loppupisteillä saadaan tulokseksi nolla, koska kaikissa kohdissa sekä $y\,dx=0$ että $x\,dy=0$. Koska vastaus on erisuuri kuin ympyränkaarta pitkin, ei potentiaalia voi olla olemassa.

Tehtävä 3

> $restart$

Lähdetään liikkeelle yleisestä muodosta

> $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{2\,xy}$,

josta voidaan ensin supistaa y ja sen jälkeen separoida muotoon

> $dy = 2\,x\,dx$.

Integroimalla saadaan

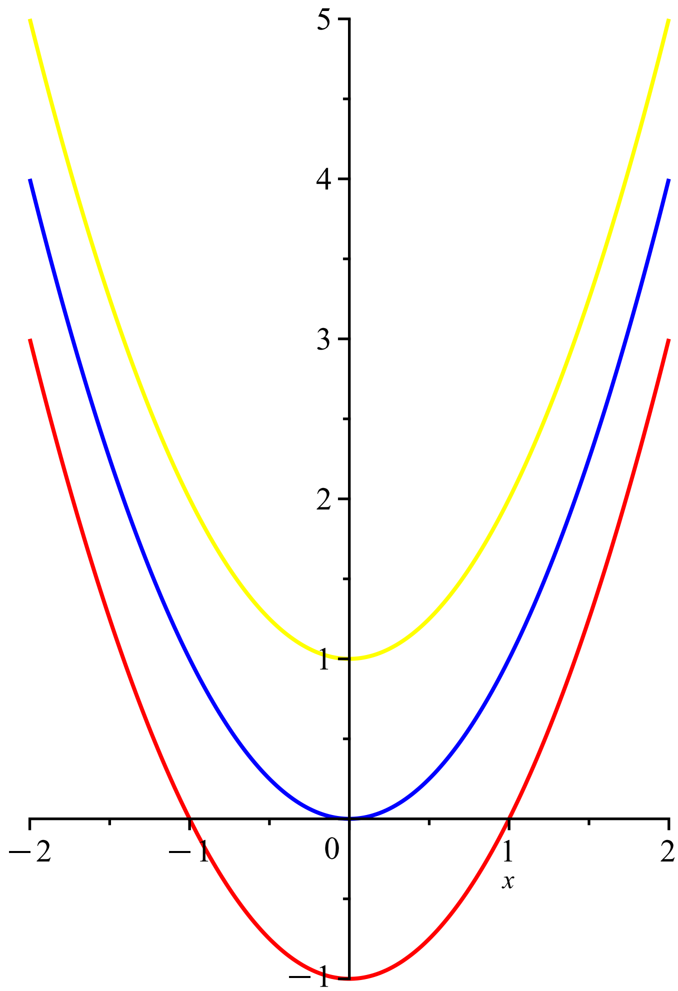
> $y = x^2 + C$

$$y = x^2 + C \tag{3.1}$$

joten kenttäviivat ovat paraabelin kaaria. Tässä vakio C voi saada kaikki reaaliarvot.

Piirretään kuvaajia:

> $plot\left(\left[seq\left(x^2 + C, C = -1 ..1\right)\right], x = -2 ..2, color = [red, blue, yellow], scaling = constrained\right)$



Tehtävä 4

> $restart$

> $F[1] := x^2 + y; F[2] := y^2 - x; F[3] := 3 \cdot z$

$$F_1 := x^2 + y$$

$$F_2 := y^2 - x$$

$$F_3 := 3\, z \tag{4.1}$$

> $div := diff(F[1], x) + diff(F[2], y) + diff(F[3], z)$

$$div := 2\, x + 2\, y + 3 \tag{4.2}$$

> $subs(\{x = 1, y = 2, z = 3\}, \%)$

(4.3)

$$9 \quad \textbf{(4.3)}$$

Lasketaan pyörteisyyden koordinaattifunktiot:

> $diff(F[3], y) - diff(F[2], z), diff(F[1], z) - diff(F[3], x), diff(F[2], x) - diff(F[1], y)$

$$0, 0, -2 \quad \textbf{(4.4)}$$

Pyörteisyys on siis vakio -2 **k**.

Tarkistetaan vielä ohjelmalla:

> $with(VectorCalculus)$

[&x, `*`, `+`, `-`, `.`, <,>, <|>, About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, ConvertVector, CrossProduct, Curl, Curvature, D, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters, GetCoordinates, GetNames, GetPVDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector, IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis, ∇, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector, PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates, SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField, VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series] **(4.5)**

> ?VectorField

> $vkenttä := VectorField(\langle F[1], F[2], F[3] \rangle, 'cartesian'[x, y, z])$

$$vkenttä := (x^2 + y)\bar{e}_x + (y^2 - x)\bar{e}_y + (3z)\bar{e}_z \quad \textbf{(4.6)}$$

> $Divergence(vkenttä)$

$$2x + 2y + 3 \quad \textbf{(4.7)}$$

> $Curl(vkenttä)$

$$(0)\bar{e}_x + (0)\bar{e}_y + (-2)\bar{e}_z \quad \textbf{(4.8)}$$

Tehtävä 5

Täydennetään puolipallon pinta umpinaiseksi pinnaksi lisäämällä ympyrän muotoinen pohja tasossa $z = 0$. Tämän vaakasuoran pinnan yksikkönormaali on $\mathbf{n} = -k$, jolloin $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -3z = 0$. Alkuperäinen vuo on siis sama kuin vuo tämän umpinaiseksi täydennetyn pinnan läpi, joten kysytty vuo saadaan Gaussin lauseen avulla. Lasketaan ensin $\nabla \cdot \mathbf{F}$:

> $diff(x^2, x) + diff(y^2, y) + diff(z^2, z)$

$$2x + 2y + 2z \quad \textbf{(5.1)}$$

Täytyy siis laskea tämän avaruusintegraali umpinaisen puolipallon yli. Symmetrian perusteella lausekkeiden x ja y integraalit ovat nollia, joten integroidaan vain $2z$ pallokoordinaattien avulla, jolloin $z = r \cdot \cos(\varphi)$ ja $dV = r^2 \cdot \sin(\varphi)$:

> $int(2 \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi), r = 0..3)$

$$\frac{81\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{2} \quad \textbf{(5.2)}$$

> $int\left(\%, \varphi = 0..\frac{Pi}{2}\right)$

$$\frac{81}{4} \tag{5.3}$$

> $int(\%, \theta = 0..2 \cdot \text{Pi})$

$$\frac{81\,\pi}{2} \tag{5.4}$$

Yllä oletettiin vuon suunta "origosta poispäin", jolloin Gaussin lause on voimassa umpinaiselle puolipallolle. Jos suunta vaihdetaan vastakkaiseksi, niin vuon etumerkki vaihtuu.

Tarkistetaan vielä laskemalla vuo määritelmän avulla.

Pallon pinnalla yksikkönormaali on $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = \frac{1}{3}\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$, joten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$.

Tämän lausekkeen pintaintegraalissa puolipallon yli x^3- ja y^3-termit integroituvat jälleen nollaksi symmetrian vuoksi, ja jäljelle jää lausekkeen $\frac{z^3}{3}$ pintaintegraali, joka kannattaa laskea pallokoordinaatiston kulmien avulla. Tällöin $z = 3 \cdot \cos(\varphi)$ ja $dS = 9 \cdot \sin(\varphi)$, joten saadaan

> $\frac{1}{3} \cdot int\left((3 \cdot \cos(\varphi))^3 \cdot 9 \cdot \sin(\varphi), \varphi = 0..\frac{\text{Pi}}{2}\right)$

$$\frac{81}{4} \tag{5.5}$$

> $int(\%, \theta = 0..2 \cdot \text{Pi})$

$$\frac{81\,\pi}{2} \tag{5.6}$$

Tehtävä 6

> $restart:$

> $x := (2 - u) \cdot \cos(v);\ y := (2 - u) \cdot \sin(v);\ z := u^2$

$$x := (2 - u)\cos(v)$$
$$y := (2 - u)\sin(v)$$
$$z := u^2 \tag{6.1}$$

Lasketaan tangenttivektorit osittaisderivaattoina:

> $with(linalg):$

> $\mathbf{r}[u] := vector([-\cos(v), -\sin(v), 2 \cdot u]);\ \mathbf{r}[v] := vector([-(2 - u) \cdot \sin(v), (2 - u) \cdot \cos(v), 0])$

$$r_u := \begin{bmatrix} -\cos(v) & -\sin(v) & 2\,u \end{bmatrix}$$
$$r_v := \begin{bmatrix} -(2 - u)\sin(v) & (2 - u)\cos(v) & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Laskujen helpottamiseksi kannattaa sijoittaa parametrien arvot ennen ristituloa. Jos ristitulon laskee yleisessä tapauksessa, kannattaa determinantin alimmalta riviltä ottaa yhteinen kerroin $2 - u$ koko determinantit kertoimeksi.

> $\boldsymbol{a} := simplify(subs(\{u = 1, v = \text{Pi}\}, \%\%));\ b := simplify(subs(\{u = 1, v = \text{Pi}\}, \%\%))$

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$b := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

> *crossprod*(**a, b**)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Ylänormaali on tämän vastavektori, mutta tämäkin käy. Sen pituus $\sqrt{5}$ on pinta-alan paikallinen suurennussuhde ja kaltevuuskulma saadaan ylänormaalin ja kantavektorin **k** välisenä kulmana:

> $\cos(\alpha) = \dfrac{-2\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}{\mathrm{sqrt}(5)\cdot 1}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5} \tag{6.5}$$

Tämä riittää vastaukseksi, mutta voidaan laskea likiarvo:

> $\mathit{evalf}\left(\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{sqrt}(5)}\right)\right)$

$$1.107148718 \tag{6.6}$$

> *convert*(%, *degrees*)

$$63.43494883\ \mathit{degrees} \tag{6.7}$$

En usko, että tällä kaltevuudella pystyy kiipeilemään, vaikka olisi kuinka tahmea pinta. Toisaalta kohta $u = 1$ on vaakasuorassa suunnassa säteen puolivälissä, mutta paraabelissa vain 1/4 huipun korkeudesta eli 2,5 metriä. Ehkä siihen voisi kädellä ylettyä?