Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Kurki
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 19.4.2023 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille IV/2023 osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Pallon
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$
lämpötila T riippuu pallokoordinaatiston muuttujasta r niin, että ytimessä $0 \leq r \leq 1$ lämpötila on 30 ja kuorella $1 < r \leq 2$ lämpötila on 6. Laske pallon keskilämpötila
$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_B T\, dV.$$
Pallon tilavuus $V = 4\pi \cdot 2^3/3$ oletetaan tunnetuksi.
Tarpeeton lisätieto: Jos lämpötilajakauma hetkellä $t = 0$ on kuvauksen mukainen ja pallon pinta täysin eristetty ulkomaailmasta, niin koko pallon lämpötila lähestyy ajan kuluessa tasapainolämpötilaa $\overline{T}$.

2. Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$ viivaintegraali pisteestä $(2, 0)$ pisteeseen $(-2, 0)$ pitkin ellipsin $x^2/4 + y^2 = 1$ ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$ kulkevaa kaarta pitkin.

3. Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ kenttäviivojen yhtälöt ja hahmottele kuvioon ainakin kolme eri kenttäviivaa. Kuvion mittakaavasta ei tarvitse välittää.

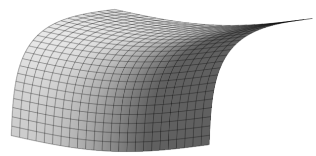
4. Vektorikenttä
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + axy + z)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j} + (bx - cz)\mathbf{k}$$
tiedetään lähteettömäksi ($\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$) ja pyörteettömäksi ($\nabla \times \mathbf{F} = \overline{0}$) koko avaruudessa.
a) Määritä vakioiden a, b ja c arvot.
b) Kun vakiot a, b ja c kiinnitetään a-kohdan mukaisesti, niin yleisen teorian perusteella vektorikentällä $\mathbf{F}$ on sekä skalaari- että vektoripotentiaali. Määritä näistä jompikumpi.

5. Laske vektorikentän
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z(3 - z)\mathbf{k}$$
vuo pinnan $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 3\}$ läpi Gaussin lauseen avulla, kun (sylinterin vaippa) S on ensin täydennetty umpinaiseksi pinnaksi niin, että $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ täydennetyillä osilla. (Nämä ehdot täytyy myös todentaa laskuilla.)

6. Luennoitsija yritti keksiä tenttiin sopivaa pintaa, mutta päätyi rauskun (?) prototyyppiin, jolla on parametrisointi

$$\mathbf{r}(u,v) = (u + \sin v, v + \sin u, u + v),$$

kun parametrialueena on neliö $\Omega = \{(u,v) \mid 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le \pi\}$.
a) Määritä rauskun keskipisteen (joka vastaa parametrien arvoja $u = v = \pi/2$) normaalivektori ja pinta-alan paikallinen suurennussuhde tässä pisteessä. (4 p.)
b) Kuvion perusteella näyttää siltä, että rauskun pyrstön päässä parametrisoinnin avulla muodostetut tangenttivektorit eivät ole lineaarisesti riippumattomat. Perustele tämä väite laskujen avulla. (2 p.)
Huom: Kuvaa on kierretty, joten normaalin suuntaa ei voi tarkistaa kuvasta.



Eräitä kaavoja:

- $\dfrac{dx}{F_1(x,y)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y)}$
- $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \longleftrightarrow x = a\cos t,\ y = b \sin t$
- $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$, $\nabla \times (a\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$, $a, b \in \mathbf{R}$.
- $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$, $\nabla \times \nabla f = \bar{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\overline{x} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint x\,dA$, $\overline{y} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint y\,dA$
- $\displaystyle\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\displaystyle\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$
- $\displaystyle\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r, φ, θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- $(r_\perp, \theta, z)$: $x = r_\perp\cos(\theta)$, $y = r_\perp\sin(\theta)$, $z = z$, $dV = r_\perp\,dr_\perp\,d\theta\,dz$
- $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin 0 = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**