MS-A0301 19.4.2023, ratkaisut

Tehtävä 1

> $V := \frac{4 \cdot \mathrm{Pi} \cdot 2^3}{3}$

$$V := \frac{32\,\pi}{3} \tag{1.1}$$

> $int(30 \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi), r = 0..1) + int(6 \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi), r = 1..2)$

$$24 \sin(\varphi) \tag{1.2}$$

> $int(\%, \varphi = 0..\mathrm{Pi})$

$$48 \tag{1.3}$$

> $T := int(\%, \theta = 0..2 \cdot \mathrm{Pi})$

$$T := 96\,\pi \tag{1.4}$$

> $keskiarvo := \frac{T}{V}$

$$keskiarvo := 9 \tag{1.5}$$

Tehtävä 2

> $x := t \rightarrow 2 \cdot \cos(t)$

$$x := t \mapsto 2 \cdot \cos(t) \tag{2.1}$$

> $y := t \rightarrow \sin(t)$

$$y := t \mapsto \sin(t) \tag{2.2}$$

> $2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 4 \cdot y(t) \cdot y'(t)$

$$-4 \cos(t) \sin(t) \tag{2.3}$$

> $int(\%, t = 0..\mathrm{Pi})$

$$0 \tag{2.4}$$

Tai potentiaalin $x^2 + 2\,y^2$ avulla sama tulos.

Tehtävä 3

> $restart$

Lähdetään liikkeelle yleisestä muodosta

> $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2\,xy}$,

joka voidaan separoida muotoon

> $-2\,x\,dx = \frac{dy}{y}$.

Integroimalla saadaan

> $C[1]-x^2 = \ln(\text{abs}(y))$

$$-x^2 + C_1 = \ln(|y|) \tag{3.1}$$

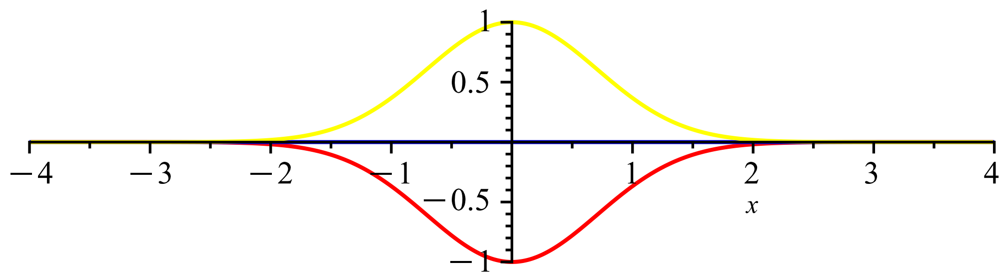
josta edelleen

> $y = \pm\ \exp(C[1]-x^2) = C\cdot\exp(-x^2).$

Tässä C voi saada kaikki reaaliarvot, myös 0 käy triviaaliratkaisun vuoksi (tätä ei vaadita).

Piirretään kuvaajia:

> $plot([seq(C\cdot\exp(-x^2), C = -1..1)], x = -4..4, color = [red, blue, yellow], scaling = constrained)$



Tehtävä 4

> *restart*

> $F[1] := x + a\cdot x\cdot y + z;\ F[2] := x^2 - y^2;\ F[3] := b\cdot x - c\cdot z$

$$F_1 := a\,x\,y + x + z$$

$$F_2 := x^2 - y^2$$

$$F_3 := b\,x - c\,z \tag{4.1}$$

> $ehto[1] := diff(F[1], x) + diff(F[2], y) + diff(F[3], z) = 0$

$$ehto_1 := a\,y - c - 2\,y + 1 = 0 \tag{4.2}$$

> $ehto[2] := diff(F[3], y) - diff(F[2], z) = 0, diff(F[1], z) - diff(F[3], x) = 0, diff(F[2], x) - diff(F[1], y) = 0$

$$ehto_2 := 0 = 0,\ 1 - b = 0,\ -a\,x + 2\,x = 0 \tag{4.3}$$

Kaikki ehdot toteutuvat koko avaruudessa vain arvoilla

> $a := 2; b := 1; c := 1$

$$a := 2$$
$$b := 1$$
$$c := 1 \tag{4.4}$$

> $F[1], F[2], F[3]$

$$2\,x\,y + x + z, x^2 - y^2, x - z \tag{4.5}$$

Integroimalla nähdään, että skalaaripotentiaali on muotoa

> $x^2 \cdot y + \frac{x^2}{2} + x \cdot z - \frac{y^3}{3} - \frac{z^2}{2} + C$

Tarkistetaan vielä ohjelmalla, myös vektoripotentiaali:

> $with(VectorCalculus)$

[&x, `*`, `+`, `-`, `.`, <,>, <|>, About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, ConvertVector, CrossProduct, Curl, Curvature, D, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters, GetCoordinates, GetNames, GetPVDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector, IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis,∇, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector, PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates, SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField, VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series] **(4.6)**

> $?VectorField$

> $vkenttä := VectorField(\langle F[1], F[2], F[3]\rangle, 'cartesian'[x, y, z])$

$$vkenttä := (2\,x\,y + x + z)\bar{e}_x + \left(x^2 - y^2\right)\bar{e}_y + (x - z)\bar{e}_z \tag{4.7}$$

> $ScalarPotential(vkenttä)$

$$x^2\,y + \frac{1}{2}\,x^2 + x\,z - \frac{1}{3}\,y^3 - \frac{1}{2}\,z^2 \tag{4.8}$$

> $VectorPotential(vkenttä)$

$$\left(x^2\,z - y^2\,z - x\,y\right)\bar{e}_x + \left(-2\,x\,y\,z - x\,z - \frac{1}{2}\,z^2\right)\bar{e}_y + (0)\bar{e}_z \tag{4.9}$$

Tämä ei tietenkään ole yksikäsitteinen, paljon muitakin vaihtoehtoja eli +∇φ millä tahansa skalaarikentällä ϕ.

Tehtävä 5

Täydennetään sylinterin vaippa umpinaiseksi pinnaksi lisäämällä ympyrän muotoinen pohja tasossa

$z = 0$ ja ympyränmuotoinen
kansi tasossa $z = 3$. Näiden vaakasuorien pintojen yksikkönormaali on $\mathbf{n} = \pm\,\mathbf{k}$, jolloin $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \pm\, z(3 - z) = 0$ pohjalla ja kannella.
Alkuperäinen vuo on siis sama kuin vuo tämän umpinaiseksi täydennetyn pinnan läpi, joten kysytty vuo saadaan Gaussin lauseen
avulla. Lasketaan ensin $\nabla \cdot \mathbf{F}$:

> $diff(x^3, x) + diff(y^3, y) + diff(z \cdot (3 - z), z)$

$$3x^2 + 3y^2 - 2z + 3 \qquad \textbf{(5.1)}$$

Integroidaan ensin z-suunnassa:

> $int(\%, z = 0..3)$

$$9x^2 + 9y^2 \qquad \textbf{(5.2)}$$

Seuraavaksi täytyy laskea tämän tasointegraali yksikköympyrässä, joten kannattaa käyttää napakoordinaatteja:

> $int(9 \cdot r^2 \cdot r, r = 0..1)$

$$\frac{9}{4} \qquad \textbf{(5.3)}$$

> $int(\%, \theta = 0..2 \cdot \mathrm{Pi})$

$$\frac{9\pi}{2} \qquad \textbf{(5.4)}$$

Tämä on siis kysytty vuo.

Tehtävä 6

> $restart:$

> $x := u + \sin(v); y := v + \sin(u); z := u + v$

$$x := u + \sin(v)$$
$$y := v + \sin(u)$$
$$z := u + v \qquad \textbf{(6.1)}$$

Lasketaan tangenttivektorit osittaisderivaattoina:

> $with(linalg):$

> $\mathbf{r}[u] := vector([1, \cos(u), 1]); \mathbf{r}[v] := vector([\cos(v), 1, 1])$

$$r_u := \begin{bmatrix} 1 & \cos(u) & 1 \end{bmatrix}$$
$$r_v := \begin{bmatrix} \cos(v) & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.2)}$$

> $crossprod(\mathbf{r}[u], \mathbf{r}[v])$

$$\begin{bmatrix} \cos(u) - 1 & -1 + \cos(v) & 1 - \cos(u)\cos(v) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.3)}$$

Sijoitetaan tähän $u = v = \frac{\pi}{2}$:

> $simplify\left(subs\left(\left\{u = \frac{\mathrm{Pi}}{2}, v = \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right\}, \%\right)\right)$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Kysytty suurennussuhde on tämän normaalivektorin pituus:

> $norm(\%, 2)$

$$\sqrt{3} \tag{6.5}$$

Huomataan, että tangenttivektorit ovat samat, jos $\cos(u) = \cos(v) = 1$. Annetussa parametrialueessa tämä toteutuu vain
arvoilla $u = v = 0$, joka vastaa parametrineliön nurkkaa ja samalla rauskun pyrstön kärkeä.