Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Kurki
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 13.4.2022 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

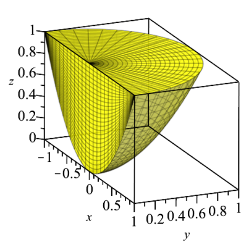
Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille IV/2022 osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Tasossa $x = 0$ olevan puolisuoran $z = y/\sqrt{3}$, $y \geq 0$, ja positiivisen y-akselin välinen kulma on $\pi/6$. Puolisuora pyörähtää z-akselin ympäri, jolloin muodostuu kartio. Määritä sen kappaleen tilavuus, jonka tämä kartio leikkaa origokeskisestä 2-säteisestä pallosta. Vihje: Pallokoordinaatisto?

2. Olkoon C kartiomainen Helix-käyrä, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(t) = (3t\cos t, 3t\sin t, \sqrt{7}\,t)$, kun $0 \leq t \leq 1$. Laske viivaintegraali
$$\int_C z\,ds.$$

3. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ ja C avaruuskäyrä, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, kun $0 \leq t \leq 2$. Laske viivaintegraali $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$
a) parametrisointia käyttämällä;
b) potentiaalin avulla. Potentiaalin lausekkeen perusteluksi riittää arvaus + tarkistus, mutta voi sen toki päätellä tarkemminkin.

4. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ ja
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ y \geq 0\}$$
Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ vuo kappaleen K reunan läpi (ulospäin).

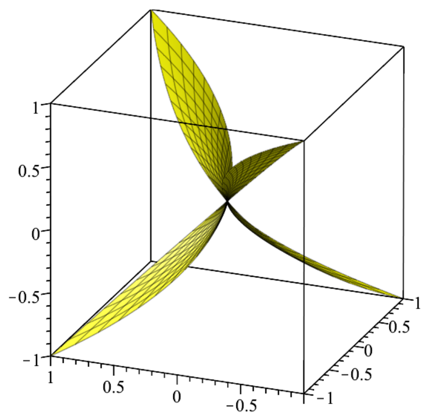


5. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$; kolmas koordinaattifunktio on siis nolla. Olkoon lisäksi
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ ja } 0 \leq z \leq 3\}$$
sylinterin vaippapinta, jonka yksikkönormaali $\mathbf{n}$ osoittaa pinnan S symmetria-akselista poispäin.
a) Piirrä kuvio, jossa näkyy yksikkönormaali $\mathbf{n}$ ja pinnan S reunakäyrien positiiviset suunnat.
b) Laske pintaintegraali
$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS$$
joko suoraan tai Stokesin lauseen avulla.

6. Tarkastellaan parametrisoitua pintaa P, joka saadaan kaavalla

$$\mathbf{r}(u,v) = (uv^2, vu^2, uv)$$

parametrineliöstä $-1 \le u \le 1$, $-1 \le v \le 1$.
a) Mikä parametrisointiin liittyvien tangenttivektoreiden ominaisuus viittaa siihen, ettei joukko P "näytä pinnalta" pisteessä $\mathbf{r}(0,0)$, joka on alla olevan kuvion keskellä?
b) Muodosta pinnan normaalivektorin yleinen lauseke.
c) Kirjoita integraalilauseke (rajat ja integroitava funktio eksplisiittisesti näkyvissä), joka antaa parametrineliötä $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$ vastaavan osan (kuvion yksi "lehti") pinta-alan. Integraalia ei tarvitse laskea.



Eräitä kaavoja:

- $\nabla \times \nabla f = \overline{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\overline{x} = \dfrac{1}{A} \iint x\,dA$, $\overline{y} = \dfrac{1}{A} \iint y\,dA$
- $\displaystyle\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\displaystyle\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$
- $\displaystyle\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r, φ, θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2 \sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- $(r_\perp, \theta, z)$: $x = r_\perp \cos(\theta)$, $y = r_\perp \sin(\theta)$, $z = z$, $dV = r_\perp\,dr_\perp\,d\theta\,dz$
- $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin 0 = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**