MS-A0301, 13.4.2022, ratkaisut

Tehtävä 1

Puolisuoran pallokoordinaatistoon liittyvä kulma on $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, joten kappaleen esitys pallokoordinaateissa on $0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$. Tilavuudeksi saadaan vaiheittain

> $int(r^2 \cdot \sin(\varphi), r = 0..2)$

$$\frac{8\sin(\varphi)}{3} \tag{1.1}$$

> $int\left(\%, \varphi = 0..\frac{\mathrm{Pi}}{3}\right)$

$$\frac{4}{3} \tag{1.2}$$

> $V := int(\%, \theta = 0..2 \cdot \mathrm{Pi})$

$$V := \frac{8\pi}{3} \tag{1.3}$$

Tehtävä 2

Parametrisoinnista lasketun tangenttivektorin komponentit ovat

> $diff(3 \cdot t \cdot \cos(t), t), diff(3 \cdot t \cdot \sin(t), t), diff(\mathrm{sqrt}(7) \cdot t, t)$

$$3\cos(t) - 3t\sin(t), 3\sin(t) + 3t\cos(t), \sqrt{7} \tag{2.1}$$

jonka pituus on

> $pituus := \mathrm{sqrt}(simplify(\%[1]^2 + \%[2]^2 + \%[3]^2))$

$$pituus := \sqrt{9t^2 + 16} \tag{2.2}$$

Kysytty integraali on

> $int(\mathrm{sqrt}(7) \cdot t \cdot pituus, t = 0..1)$

$$\frac{61\sqrt{7}}{27} \tag{2.3}$$

Tehtävä 3

a-kohta:

> $x := t \to t; y := t \to t^2; z := t \to t^3$

$$x := t \mapsto t$$
$$y := t \mapsto t^2$$
$$z := t \mapsto t^3 \tag{3.1}$$

> $Fdr := y(t)\cdot x'(t) + x(t)\cdot y'(t) + 4\cdot z(t)\cdot z'(t)$

$$Fdr := 12\,t^5 + 3\,t^2 \qquad \textbf{(3.2)}$$

> $int(\%, t=0..2)$

$$136 \qquad \textbf{(3.3)}$$

b-kohta:

Selvästi potentiaaliksi käy

> $\varphi := (x, y, z) \rightarrow x\cdot y + 2\cdot z^2$

$$\varphi := (x, y, z) \mapsto y\cdot x + 2\cdot z^2 \qquad \textbf{(3.4)}$$

joten potentiaalin avulla saadaan käyrän päätepisteet sijoittamalla integraalin arvoksi

> $\varphi(2, 4, 8) - \varphi(0, 0, 0)$

$$136 \qquad \textbf{(3.5)}$$

Tehtävä 4

Koska $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = y,$ niin kannattaa kokeilla vuon laskemista Gaussin lauseen avulla. Lasketaan siis funktion y avaruusintegraali kappaleen *K* yli. Kappaleen projektio xy - tasolle on yksikköympyrän puolikas *D*, jossa $y \geq 0$ ja lisäksi sitä rajaavat epäyhtälöt $x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$ Pystysuoran suunnan integraali on

> $int\left(y, z=x^2+y^2..1\right)$

$$y\left(-x^2 - y^2 + 1\right) \qquad \textbf{(4.1)}$$

Tämän funktion integraali kannattaa laskea napakoordinaattien avulla joukossa D, jolloin integroivana on
$\left(1 - r^2\right)\cdot r\cdot\sin(\theta)$ ja sen lisäksi pinta-alan suurennussuhde $r.$ Integraaliin arvo on vaiheittain laskettuna

> $int\left(\left(1 - r^2\right)\cdot r\cdot\sin(\theta)\cdot r, r=0..1\right)$

$$\frac{2\sin(\theta)}{15} \qquad \textbf{(4.2)}$$

> $int(\%, \theta=0..\mathrm{Pi})$

$$\frac{4}{15} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Tehtävä 5

a-kohta: Pinnan reunaan kuuluu kaksi 1-säteistä ympyrää korkeudella $z=0$ ja $z=3.$ Koska normaalin suunta
on ulospäin, niin alemman ympyrän kiertosuunta on oikean käden säännön perusteella *xy*-tasossa vastapäivään,
ja ylemmän kiertosuunta (*xy*-tasoon projisoituna) myötäpäivään. Pinnan normaali on vaakasuorassa, ja sen
suunta *z*-akselista poispäin.

b-kohta:

Koska $\nabla\times\mathbf{F} = -2\,\mathbf{k}$ on kohtisuorassa pinnan normaalia vastaan, niin integraalin arvo on 0.

Stokesin lauseella täytyy laskea kaksi viivaintegraalia, joissa molemmissa $\mathbf{F}\cdot \boldsymbol{dr}$ on $\pm$ sama vakio kyseisillä
ympyröillä, joten integraalien summa on 0.

Tehtävä 6

Osittaisderivoimalla saadaan tangenttivektorit $\mathbf{r}_u = v^2\mathbf{i} + 2\,uv\mathbf{j} + v\mathbf{k}$ ja $r_v = 2\,uvi + u^2 j + uk$.

a-kohta: Sijoittamalla $u = v = 0$ molemmista tangenttivektoreista tulee nollavektori, joten pinta ei "levittäydy
kahteen eri suuntaan" eikä "näytä pinnalta". Vastaukseksi riittää maininta nollavektoreista.

b-kohta: Tangenttivektoreiden ristitulona saadaan normaali $\mathbf{N} = u^2 v\, i + uv^2\, j - 3\, u^2 v^2\, k$.

c-kohta: Edellä lasketun normaalin pituus on

$\sqrt{u^4 v^2 + u^2 v^4 + 9\, u^4 v^4} = uv\sqrt{u^2 + 9\, u^2 v^2 + v^2}$ positiivisilla
parametrien arvoilla. Yhden "lehden" pinta-ala on siis

> $Int\left(Int\left(u\cdot v\cdot\sqrt{u^2 + 9\cdot u^2\cdot v^2 + v^2}, v = 0\,..1\right), u = 0\,..1\right) = int\left(int\left(u\cdot v\cdot\sqrt{u^2 + 9\cdot u^2\cdot v^2 + v^2}, v = 0\,..1\right), u = 0\,..1\right)$

$$\int_0^1\int_0^1 u\, v\sqrt{9\, u^2 v^2 + u^2 + v^2}\, dv\, du = -\frac{4}{243} - \frac{2\arctan(3)}{729} + \frac{32\sqrt{11}}{243} + \frac{\arctan\left(3\sqrt{11}\right)}{729} \qquad \textbf{(6.1)}$$

> $evalf(\%)$

$$0.4188868549 \qquad \textbf{(6.2)}$$

Integraalin arvoa ei tarvinnut laskea, eikä neliöjuurilauseketta tarvitse sieventää.