ELEC-C1230 Säätötekniikka
5. laskuharjoitus

Routhin kaavio, stabiilisuus, impulssivasteet

1. Tutki kuinka monta juurta seuraavilla polynomeilla on oikeassa puolitasossa.

a. $s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4$ **b.** $2s^5 + s^4 + 3s^2 + s + 2$
c. $s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 10$

2. Piirrä seuraavien prosessien napa-nolla -kuviot, määritä impulssivasteet ja hahmottele niiden käyttäytyminen aikatasossa.

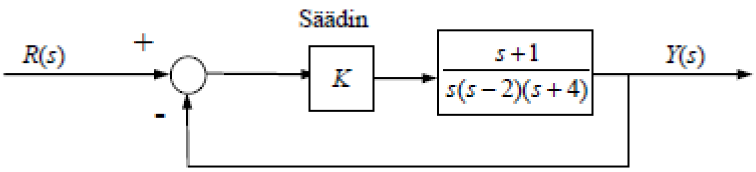
a. $G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 7s + 10}$

b. $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1}$

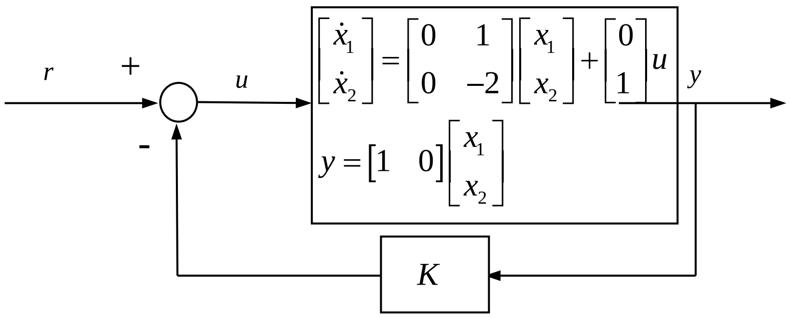
c. $G(s) = \dfrac{13}{s^2 + 6s + 13}$

d. $G(s) = \dfrac{0.5}{s - 0.5}$

3. Alla olevan systeemin prosessi on epästabiili. Tarkoittaako tämä sitä, että koko systeemi on epästabiili?



4. Millä takaisinkytkentävahvistuksen K arvoilla ($K > 0$) kokonaissysteemi on stabiili?



Laplace-muunnoksen teoreemoja

Määritelmä: $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$	
Laplace-muunnos	Ajan funktio
$F(s)$	$f(t)$
$C_1F_2(s) + C_2F_2(s)$	$C_1f_2(t) + C_2f_2(t)$
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$
$e^{-as}F(s)$	$\begin{cases} 0, & t \le a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$
$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$
$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$
$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$
$s^nF(s) - \left[s^{n-1}f(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)\right]$	$f^{(n)}(t)$
Mikäli $f(t)$:n ja $F(s)$:n raja-arvot ovat olemassa, niin niille pätee: $\lim_{s\to 0}\{sF(s)\} = \lim_{t\to\infty}\{f(t)\}$ $\quad$ $\lim_{s\to\infty}\{sF(s)\} = \lim_{t\to 0}\{f(t)\}$	

Laplace-muunnos ja aikavasteita

Laplace-muunnos	Ajan funktio
1	$\delta(t)$
$1 / s$	1
$1 / s^2$	t
$1 / s^{n+1}$	$t^n / n!$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(b-a)}\left(ae^{-bt} - be^{-at}\right)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\sin(at)$
$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\cos(at)$
$\frac{s+a}{s+b}$	$\delta(t)+(a-b)e^{-bt}$

Routhin kaavion muodostusohjeet

Mielivaltaista astelukua olevan nollakohtien sijaintia kompleksitason positiivisessa ja negatiivisesa puolitasossa voidaan tutkia Routhin kaavion avulla:

Polynomi: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n, \quad a_0 > 0$

Kaavio:

s^n	a_0	a_2	a_4	$\ldots$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$\ldots$
s^{n-2}	b_0	b_1	$\ldots$	
s^{n-3}	c_0	c_1	$\ldots$	
s^0	z_0			

Kaavion alkio z_n lasketaan kaavalla:
$$z_n = \frac{y_0 x_{n+1} - x_0 y_{n+1}}{y_0} = x_{n+1} - x_0 \frac{y_{n+1}}{y_0}$$

s^{i+2}	x_0	$\ldots$	$\ldots$	x_{n+1}	$\ldots$
s^{i+1}	y_0	$\ldots$	$\ldots$	y_{n+1}	$\ldots$
s^i			z_n		

1. Oikeassa puolitasossa olevien polynomin nollakohtien lukumäärä on kaavion ensimmäisen sarakkeen merkinvaihtojen lukumäärä.

2. Jos polynomin jokin kerroin on negatiivinen, vähintään yksi juuri on oikeassa puolitasossa tai imaginääriakselilla.

3. Jos polynomin jokin kerroin puuttuu eli on nolla, vähintään yksi juuri on imaginääriakselilla.

4. Jos kaaviota muodostettaessa sen ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, sijoitetaan sen tilalle pieni positiivinen luku $\varepsilon > 0$ ja jatketaan kaavion muodostamista. Lopullisesta kaaviosta voidaan laskea merkinvaihdot tutkimalla ε:sta riippuvien termien raja-arvot, kun $\varepsilon \to 0$.

5. Mikäli kaavioon tulee koko rivi nollia, ylemmästä rivistä voidaan muodostaa polynomi, jolla alkuperäinen polynomi on jaollinen.