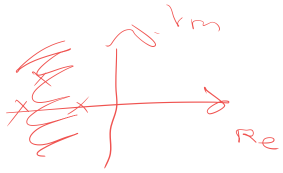
ELEC-C1230 Säätötekniikka
5. laskuharjoitus
Vastaukset

1.

a. Polynomi: $s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4$



Vastaava Routhin kaavio:

s^4	$1 = a_0$	$13 = a_2$	$4 = a_4$
s^3	$6 = a_1$	$12 = a_3$	$0 = a_5$
s^2	$\frac{6\cdot 13 - 1\cdot 12}{6} = 11 = b_0$	$\frac{6\cdot 4 - 1\cdot 0}{6} = 4 = b_2$	
s^1	$\frac{11\cdot 12 - 6\cdot 4}{11} = \frac{108}{11} = b_1$	$0 = b_3$	
s^0	$\frac{108/11\cdot 4 - 11\cdot 0}{108/11} = 4 = c_0$		

$b_0 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$

$b_0 = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$

$b_2 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$

Ensimmäinen sarake on: $[1 \quad 6 \quad 11 \quad 108/11 \quad 4]$. Ensimmäisessä sarakkeessa ei ole merkinvaihtoja, joten polynomin kaikki navat ovat vasemmassa puolitasossa.

b. Polynomi: $2s^5 + s^4 + 3s^2 + s + 2 = 2s^5 + s^4 + 0s^3 + 3s^2 + s + 2$

Vastaava Routhin kaavio:

s^5	$2 = a_0$	$0 \; a_2$	$1 \; a_4$
s^4	$1 = a_1$	$3 \; a_3$	$2 \; a_5$
s^3	$\frac{1\cdot 0 - 2\cdot 3}{1} = -6 = b_0$	$\frac{1\cdot 1 - 2\cdot 2}{1} = -3 \; b_2$	
s^2	$\frac{-6\cdot 3 - 1\cdot(-3)}{-6} = \frac{5}{2} = b_1$	$\frac{-6\cdot 2 - 1\cdot 0}{-6} = 2 \; b_3$	
s^1	$\frac{5/2\cdot(-3) - (-6)\cdot 2}{5/2} = \frac{9}{5} \; c_6$	$0 \; c_2$	
s^0	$\frac{9/5\cdot 2 - 5/2\cdot 0}{9/5} = 2 \; c_7$		

Ensimmäinen sarake on: $[2 \;\; 1 \;\; -6 \;\; 5/2 \;\; 9/5 \;\; 2]$. Sarakkeessa on kaksi merkinvaihtoa: $1 \to -6$ ja $-6 \to 5/2$, joten polynomilla on kaksi napaa oikeassa puolitasossa.

c. Polynomi: $s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 10$

$z_n = x_{n+1} - x_0 \frac{y_{n+1}}{y_0}$

Routhin kaavio:

s^4	$1 = a_0$	$4 = a_2$	$10 = a_4$
s^3	$2 = a_1$	$8 = a_3$	$0 = a_5$
s^2	$\frac{2\cdot 4 - 1\cdot 8}{2} = \varepsilon = b_0$	$\frac{2\cdot 10 - 1\cdot 0}{2} = 10 = b_2$	
s^1	$\frac{\varepsilon\cdot 8 - 2\cdot 10}{\varepsilon} = c_0$	$0 = c_2$	

$b_0 = x_{n+1} - x_0 \frac{y_{n+1}}{y_0} = a_2 - a_0 \frac{a_3}{a_1} = 4 - 1\cdot\frac{8}{2} = 0 = \varepsilon$

$b_2 = \text{—"—} = a_4 - a_2 \frac{a_5}{a_3} = 10 - 4\frac{0}{8} = 10$

$c_0 = \text{—"—} = a_3 - a_1 \frac{b_2}{b_0} = 8 - 2\frac{10}{\varepsilon}$

$$s^0 \quad \Big| \quad \frac{c_0 \cdot 10 - \varepsilon \cdot 0}{c_0} = 10$$

Tarkastellaan termin $c_0 = \dfrac{\varepsilon \cdot 8 - 2 \cdot 10}{\varepsilon}$ raja-arvoa, kun ε lähenee nollaa:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\{c_0\} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\frac{8\varepsilon - 20}{\varepsilon}\right\} = 8 - 20 \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\} = -\infty \ .$$

Täten ensimmäisestä sarakkeesta tulee: [1 2 0 -∞ 10] . Nyt ensimmäsessä sarakkeessa on kaksi merkinvaihtoa: 0 → -∞ ja -∞ → 10, joten polynomilla on kaksi napaa oikeassa puolitasossa.

Matlab ratkaisee juuret näppärästi `roots`-komennolla, kuten esimerkiksi **b**-kohdassa :

```
>> roots([1 2 4 8 10])

ans =

   0.4199 + 1.8588i
   0.4199 - 1.8588i
  -1.4199 + 0.8588i
  -1.4199 - 0.8588i
```

2. Järjestelmää kuvaa siirtofunktio *G*(*s*). Siirtofunktio on viety polynomimuotoon (sen osoittaja ja nimittäjä ovat *s*:n polynomeja):

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \begin{cases} P(s) & \text{on karakteristinen polynomi} \\ Q(s) = 0 & \text{on karakteristinen yhtälö} \end{cases}$$

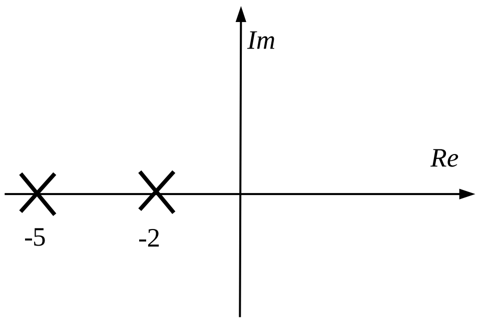
$G(s)$:n nimittäjän $Q(s)$:n nollakohdat = karakteristisen yhtälön juuret = järjestelmän navat (pole) ja $G(s)$:n osoittajan $P(s)$ nollakohdat = järjestelmän nollat (zero).

Napa-nolla -kuviossa järjestelmän navat ja nollat kuvataan graafisesti kompleksitasossa (imaginääriakseli vs. reaaliakseli).
- reaalikertoimisella polynomilla on aina asteluvun osoittama määrä juuria (juuret voivat tosin olla keskenään yhtä suuria)
- kompleksijuuret esiintyvät aina parina: *a*+*bi*, *a*-*bi*.

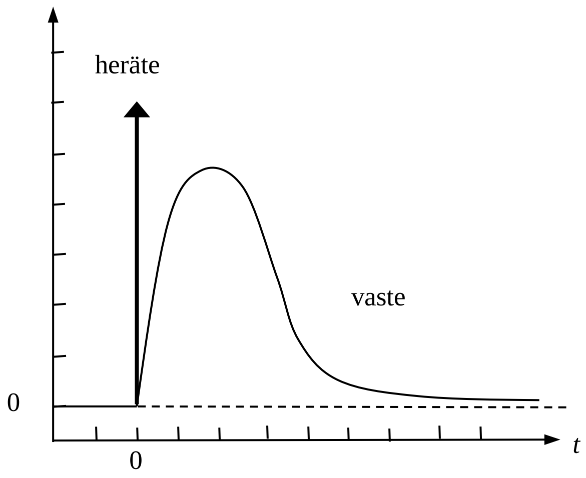
a. $G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 7s + 10} = \dfrac{10}{(s+5)(s+2)}$

ei nollia

navat: $s_{p1} = -2, s_{p2} = -5$

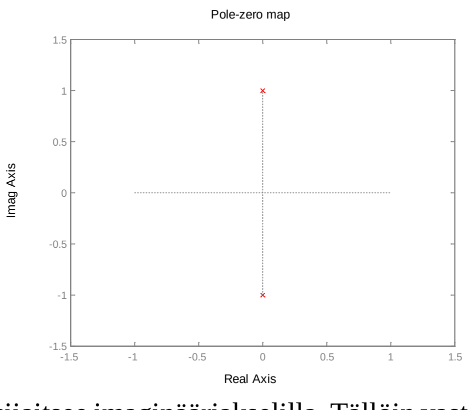


Impulssivaste: $y(t) = \frac{10}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\right)$



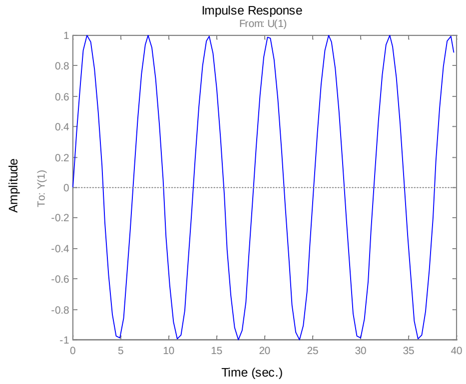
b. Matlabilla napojen ja nollien sekä impulssivasteiden mekaaninen piirtäminen käy helposti.

```
>> pzmap(tf([1],[1 0 1]))
```



Yksi napapari, joka sijaitsee imaginääriakselilla. Tällöin vasteen pitäisi olla harmonista värähtelyä. Laplace-käänteismuuntamalla saataisiin jälleen aikatason vaste, jonka voisi hahmotella käsin, mutta Matlabilla tämäkin hoituu helpommin.

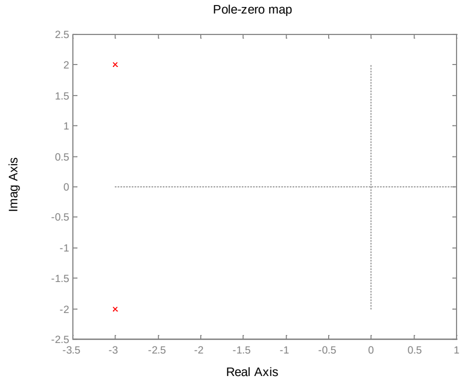
```
>> impulse(tf([1],[1 0 1]))
```



Kuten kuvasta nähdään vaste on harmonista värähtelyä.

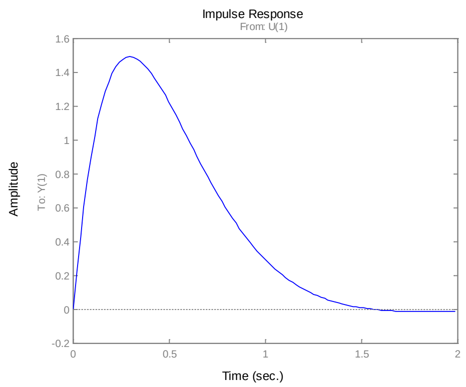
c.

```
>> pzmap(tf([13],[1 6 13]))
```



Vasemmassa puolitasossa sijaitseva imaginäärinen napapari. Tällöin vaste on vaimenevaa värähtelyä.

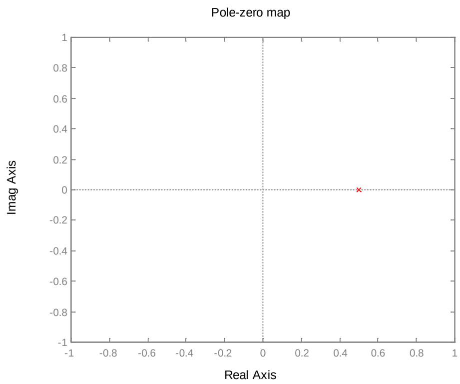
```
>> impulse(tf([13],[1 6 13]))
```



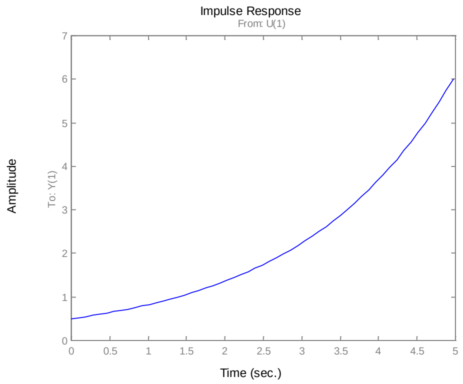
Niinkuin onkin. Matlabin automaattinen aikaskaala on lyhyt, mutta tarkemmin katsottuna huomataan, että vaste painuu nollan alapuolelle, joten se on värähtelevä.

d.

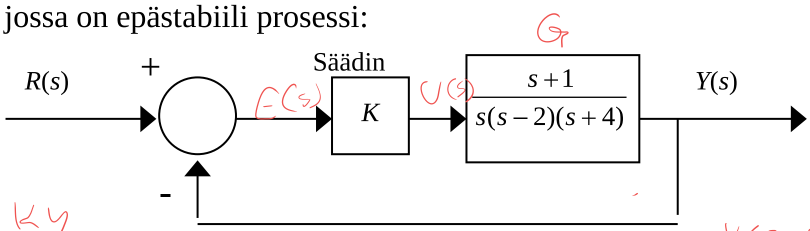
```
>> pzmap(tf([0.5],[1 -0.5]))
```



Yksi napa, joka sijaitsee oikeassa puolitasossa. Epästabiili.



3. Systeemi, jossa on epästabiili prosessi:



$$\begin{cases} E = R - Y \\ U = KE = KR - KY \\ Y = GU = \\ \quad = G\,KR - GKY \end{cases}$$

Muodostetaan koko systeemin siirtofunktio:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\dfrac{s+1}{s(s-2)(s+4)}}{1+K\dfrac{s+1}{s(s-2)(s+4)}} = \frac{K(s+1)}{s(s-2)(s+4)+K(s+1)} = \frac{K(s+1)}{s^3+2s^2+(K-8)s+K}$$

$$\frac{\dfrac{K(s+1)}{\cancel{s(s-2)(s+4)}}}{\dfrac{s(s-2)(s+4)+K(s+1)}{\cancel{s(s-2)(s+4)}}}$$

$$Y + GKY = GKR$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{GK}{1+GK}$$

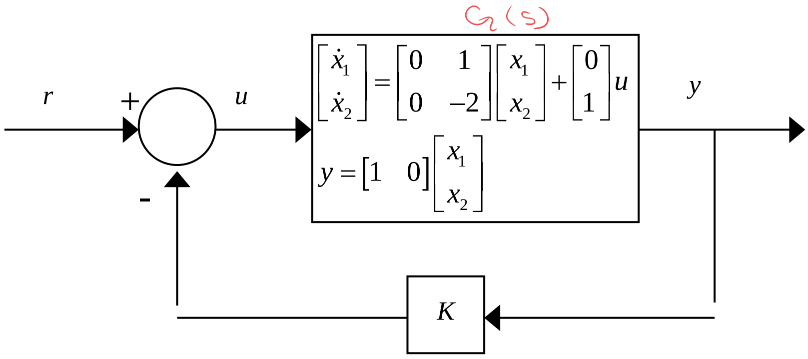
Katsotaan napojen paikat tekemällä Routhin kaavio polynomille $s^3+2s^2+(K-8)s+K$:

s^3	1	K-8
s^2	2	K
s^1	$\dfrac{2\cdot(K-8)-1\cdot K}{2} = \dfrac{K-16}{2}$	0
s^0	$\dfrac{(K-16)/2\cdot K - 2\cdot 0}{(K-16)/2} = K$	

Stabiilisuudelle saadaan ehdot: $\dfrac{K-16}{2} > 0$ ja $K > 0$

$\Rightarrow$ Systeemi on asymptoottisesti stabiili, kun $K > 16$. Epästabiilia systeemiä voidaan siis hyvin ohjata takaisinkytkennän ja P-säätimen avulla stabiilisti.

4. Käsiteltävä systeemi:



Luonnollista olisi laskea ensin prosessin siirtofunktio $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = C\left(sI - A\right)^{-1}B$ ja muodostaa sitten suljetun järjestelmän siirtofunktio. Tehdään nyt kuitenkin toisin:

Kuvan perusteella voidaan kirjoittaa seuraavat yhtälöt:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}\underset{y}{u(t)}$$

$= Ax + Br - BKy = Ax + Br - BKCx$

$= \underbrace{(A - BKC)}_{A_1}x + Br$

$$y(t) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$u(t) = r(t) - Ky(t)$$

$\overbrace{[\ \vdots\ ]}^{A} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}K[1 \quad 0]$

$[\ \cdot\cdot\ ] - \underbrace{\begin{bmatrix}0\\K\end{bmatrix}[1 \quad 0]}$

$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ K & 0\end{bmatrix}$

Kahdesta alemmasta saadaan: $u(t) = r(t) - Kx_1(t)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -K & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r(t)$$

Systeemi on stabiili silloin, kun karakteristisen yhtälön juuret ovat vasemmassa puolitasossa:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -K & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & -1\\ K & s+2\end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s(s+2) - (-1)\cdot K = s^2 + 2s + K$$

Katsotaan stabiilisuusehto Routhin kaaviolla:

s^2	1	K
s^1	2	0
s^0	$\frac{2\cdot K - 1\cdot 0}{2} = K$	

Saadaan stabiilisuusehto: $K > 0$.
Samaan tulokseen olisi päässyt myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-K} \Rightarrow \sqrt{1-K} < 1 \Rightarrow 1-K < 1 \Rightarrow K > 0$$