ELEC-C1230 Säätötekniikka
6. laskuharjoitus
Vastaukset

1.

a. Ohjattavuusmatriisi

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ b_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ b_2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1+3b_2\\ b_2 & -2b_2\end{bmatrix},$$

Prosessi on saavutettava, jos det ($\mathbf{M}$) $\neq 0$

⇨ $b_2 \neq 0 \wedge b_2 \neq -1/3$

b. Tarkkailtavuusmatriisi

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}c_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & 1\\ -c_1 & 3c_1-2\end{bmatrix},$$

Prosessi on tarkkailtava, jos det ($\mathbf{S}$) $\neq 0$

⇨ $c_1 \neq 0 \wedge c_1 \neq 1/3$

2.

a.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$
$$u = Tr - Lx$$

Sijoittamalla ohjauksen lauseke tilayhtälöön saadaan

$$\dot{x} = Ax - BLx + BTr = (A - BL)x + BTr$$

jolloin kokonaisjärjestelmän siirtofunktio on

$$G(s) = C(sI - A + BL)^{-1}BT$$

Karakteristinen yhtälö

$$\det(sI-A+BL) = \det\left(\begin{bmatrix}s+1-l_1 & -l_2\\ -2 & s-1\end{bmatrix}\right)=(s+1-l_1)(s-1)-2l_2=0$$

⇔ $s^2 - l_1 s + l_1 - 2l_2 - 1 = 0$

Karakteristiseksi yhtälöksi halutaan $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$. Merkitsemällä kertoimet yhtäsuuriksi saadaan $l_1 = -4,\quad l_2 = -\frac{9}{2}$.

b. $\lim_{s\to 0} C(sI - A + BL)^{-1}BT$

$=\lim_{s\to 0}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+1-l_1)(s-1)-2l_2}\begin{bmatrix}s-1 & l_2\\ 2 & s+1-l_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-T\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{-1+l_1-2l_2}\begin{bmatrix}-1 & l_2\\ 2 & 1-l_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-T\\ 0\end{bmatrix}$

$=\lim_{s\to 0}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+1-l_1)(s-1)-2l_2}\begin{bmatrix}s-1 & l_2\\ 2 & s+1-l_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-T\\ 0\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{-1+l_1-2l_2}\begin{bmatrix}-1 & l_2\\ 2 & 1-l_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-T\\ 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{-1+l_1-2l_2}\begin{bmatrix}T\\ -2T\end{bmatrix}=\frac{T-2T}{-1+l_1-2l_2}$ =1 => T = $-(-1+l_1-2l_2)$ = 1+4-9 = -4.

3. Systeemi:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

a. Tilatakaisinkytketyn systeemin karakteristinen yhtälö:

det(s**I** - **A** + **BL**) = 0

$$\det\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1 & l_2\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 2l_1 & s+2+2l_2\end{bmatrix}\right)$$

$= (s + 1)(s + 2 + 2l_2) = s^2 + (3 + 2l_2)s + (2 + 2l_2) \equiv (s + 4)(s + 4) = s^2 + 8s + 16.$

$$\Rightarrow \begin{cases}3 + 2l_2 = 8\\ 2 + 2l_2 = 16\end{cases}$$

Yhtälöpari ei selvästikään ratkea, joten ei ole mahdollista tehdä tilatakaisinkytkentää, jossa navat ovat pisteessä $s = -4$.

b. Systeemin navat:

$s^2 + (3 + 2l_2)s + (2 + 2l_2) = 0.$

$$\Rightarrow s_{1,2} = \frac{-3-2l_2 \pm \sqrt{(3+2l_2)^2 - 4(2+2l_2)}}{2} = \frac{-3-2l_2 \pm \sqrt{1+4l_2+4l_2^2}}{2}$$

$$= \frac{-3-2l_2 \pm (1+2l_2)}{2} \Rightarrow s_1 = -1 \text{ ja } s_2 = -2-2l_2.$$

Eli pisteessä $s = -1$ olevaa napaa ei voida siirtää tilatakaisinkytkennällä.
Suljetun systeemin siirtofunktio:

$$Y(s) / R(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL})^{-1}\mathbf{B}.$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + (3+2l_2)s + (2+2l_2)} \begin{bmatrix} s+2+2l_2 & 0 \\ -2l_1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{0}{s^2 + (3+2l_2)s + (2+2l_2)} = 0.$$

Ongelma on ilmeinen: siirtofunktioksi tulee 0. Viittaa siihen, että systeemi ei ole tarkkailtava ja saavutettava. Katsotaan vielä systeemin ohjattavuus- ja havaittavuusmatriisit:

Ohjattavuusmatriisi:

$$\mathbf{M}_c = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},$$

rank($\mathbf{M}_c$) = 1, eli systeemi ei ole saavutettava.

Havaittavuusmatriisi:

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

rank($\mathbf{M}_o$) = 1, eli systeemi ei ole tarkkailtava.

Huom. Kirjoita alkuperäisen prosessin tilayhtälöt auki: huomaat heti, että ohjaus u ei todellakaan vaikuta lähtömuuttujaan y. Selvästi myös nähdään, että ensimmäistä tilamuuttujaa ei todellakaan voi ohjata eikä toista tarkkailla.

Mutta: Tämä oli aika patologinen tapaus. Löytyy myös tapauksia, joissa ihan ohjattavan näköiset tilayhtälöt kadottavat joillakin parametrien arvoilla saavutettavuuden ja/tai tarkkailtavuuden. Ohjattavuus- ja tarkkailtavuusmatriisien tutkiminen on aina luotettava keino asian tutkimiseksi.

Jos vielä olet epäileväinen ja ihmettelet, että siirtofunktioksi tuli nolla: Kirjoita

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx \\
u &= Tr - Lx
\end{aligned}
$$

Ohjauksen lausekkeessa T on skalaari ja $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ vektori. Suljetun järjestelmän esitykseksi saadaan

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax - BLx + BTr = (A - BL)x + BTr \\
y &= Cx
\end{aligned}
$$

Suorittamalla laskut saadaan

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2l_1 & -2 - 2l_2 \end{bmatrix} x + T \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} r \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

eli

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 \\
\dot{x}_2 &= -2l_1 x_1 - (2 + 2l_2) x_2 + 2Tr \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

Lähtömuuttuja $y = x_1$ elää omaa elämäänsä eikä referenssisuure vaikuta siihen. Jos sillä on nollasta poikkeava alkuarvo, tila menee nollaan eksponentiaalisesti kuitenkin. (Siirtofunktiotarkastelussa alkuarvot oletetaan nolliksi). Tilamuuttuja x_2 toki riippuu referenssisuureesta.