# KERTAUS / 2024

JÄRJESTELYT :

VIIMEISET KOTITEHTÄVÄT :

STACK → 4p

Kaikki palautukset ennen koetta.

Tenttipäivä : ma 19.2.2024

Kurssitentin tehtävien ensimmäiset sarat julkaistaan su 18.2 kurssin sivuille.

SISÄLLÖISTÄ

(1) GRADIENTTI

- tulkinta

SUUNNATTU DERIVAATTA

- normalisointi (!)

(2) KETJUSÄÄNNÖT

- puurakenne

(3) PISTEAPPROKSIMAATIOT

- linearisointi
- Taylorin polynomi

(4) RAJOITEOPTIMOINTI

- Lagrangen kertoimet

↳ epälineaarinen yhtälöryhmä

(5) TASO- JA AVARUUSINTEGRAALI

- integroimisalueen määrittely
- muuttujanvaihto
- koordinaatistomuunnokset

[ (6) MASSAKESKIPISTE / HITAUSMOMENTTI ]

Huomaa! Kohta (6) ei ole kurssitentin koealueessa, mutta se on aina varsinaisen tentin (uusinta tai muu) koealueessa.

LAGRANGEN KERTOIMISTA

Synteesi ääriarvoista:

(i) Lagrangen funktion kriittinen piste

(ii) piste $\nabla g = \underline{0}$

(iii) piste, jossa joko $\nabla f$ tai $\nabla g$ ei ole määritelty

(iv) rajoitusehdon määrää-män pistejoukon reuna

Esimerkki

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xy + 2z + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda + 2\mu x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda + 2\mu y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + \lambda + 2\mu z = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 \qquad (5)$$

$(2) - (1)$ : $(x - y)(1 - 2\mu) = 0$

(A) $\mu = \frac{1}{2}$ ; $(2) - (3)$,

$$x + y = 2 + z$$

(4) $x + y = -z \quad \Rightarrow z = -1$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow x + y = 1 \\ (5)\ &x^2 + y^2 = 23 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ?$$

Neliöiden erotuksia :

$$(x+y)^2 = \ldots \qquad (i)$$

$$(x-y)^2 = \ldots \qquad (ii)$$

$$(i) = 1 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$= 23 + 2xy$$

$$(ii) = x^2 + y^2 - 2xy$$
$$= 23 - 2xy$$

(i) $\Rightarrow xy = -11$

(ii) $(x-y)^2 = 45$

$$x - y = \pm 3\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \pm 3\sqrt{5} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = xy + 2z = -13$$

(B) $x = y$

(4) $z = -2x$

(5) $6x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2$

Pisteet: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{= x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{= x_2}$

$$f(x_1) = -4$$

$$f(x_2) = 12$$

## Yhtälöryhmän ratkaisu iteratiivisesti

Terminologiaa: Gauss on ns. suora menetelmä

### Gradienttimenetelmä

Tehtävä: $Ax = b$

$A$ symmetrinen ja pos. def.

$x_*$ tarkka ratkaisu

Minimoidaan!

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$$

Onhan

$$\nabla \phi(x) = Ax - b$$

Merkitään: $x_c$ approksimaatio

Valitaan normi:

$$\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$$

$$\phi(x_c) = \frac{1}{2} x_c^T A x_c - x_c^T b$$

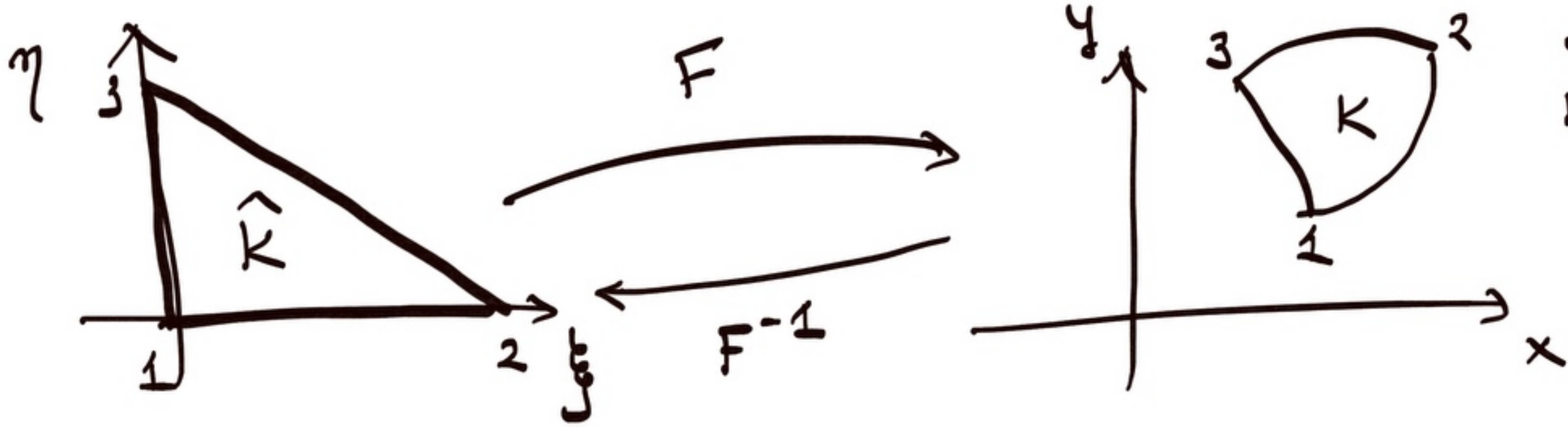
$$\begin{cases} b = A x_* \\ x_* = A^{-1} b \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}(x_c - x_*)^T A (x_c - x_*) - \frac{1}{2} b^T A^{-1} b$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\|x_c - x_*\|_A^2}_{\text{Jos iteraatio suppenee, niin } \to 0} + \phi(x_*)$$

Idea: Kuljetaan aina negatiivisen gradientin suuntaan!

# Gradientin muunnoskaava




$\varphi_j(x) = 1$ pisteessä j, $= 0$ muissa kolmion kärkipisteissä

Tarkastellaan K:lle rajoitettuja funktioita $\varphi_j(x)$, missä $x \in \mathbb{R}^2$.

Pätee: $\varphi_j(x) = \hat{\varphi}_j(F^{-1}(x))$, $j = 1, 2, 3$.

Integraali: $\alpha_{ij}^K = \int_K \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

Ketjusääntö: (tässä: $j = 1, 2$)
$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\hat{\varphi}_i(F^{-1}(x))\right) = \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_j}$$

eli $\nabla\varphi_i = J_F^{-T}\nabla\hat{\varphi}_i$, missä $J_F$ on kuvauksen Jacobin matriisi.

Saadaan tärkeä identiteetti: $\alpha_{ij}^K = \int_{\hat{K}} (J_F^{-T}\nabla\hat{\varphi}_i) \cdot (J_F^{-T}\nabla\hat{\varphi}_j)\,|\det J| \, d\hat{x}$