Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0204 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 Alestalo/Abuzaid

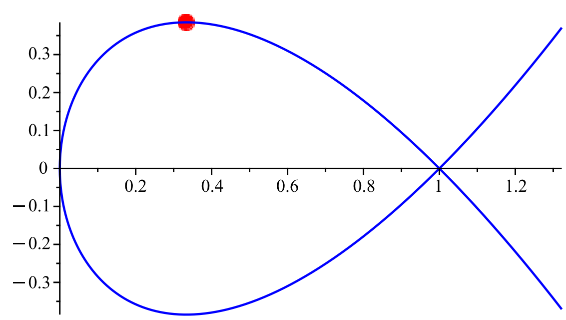
Kurssitentti ja yleinen tentti 19.2.2024 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä erillisiä taulukkokirjoja tai muistiinpanoja.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Kaikki periodin III/2024 luentokurssille osallistuneet voivat halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Parametrisoitu tasokäyrä $x = t^2$, $y = t - t^3$, muistuttaa kreikkalaista α-kirjainta, kun $-1{,}15 \le t \le 1{,}15$, vrt. kuvio.
   a) Määritä α-käyrän ”huippukohdan” (merkitty kuvioon) x-koordinaatti.
   Vihje: Huippukohdassa käyrän tangenttivektori on vaakasuora.
   b) Käyrä leikkaa itseään parametrien arvoilla $t = \pm 1$. Tutki, onko leikkaus kohtisuora, eli ovatko näillä kahdella parametrin arvolla lasketut tangenttivektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan.
   c) Muodosta integraalilauseke, joka esittää α-käyrän silmukan kaarenpituutta. Integraalin arvoa ei tarvitse laskea, mutta vastauksessa täytyy näkyä integroitava funktio ja integroinnin rajat.



2. a) Onko funktiolla
$$f(x,y) = \frac{x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2}$$
   raja-arvoa origossa $(0,0)$? Määritä raja-arvo, jos se on olemassa.
   b) Määritä funktion $g(x,y) = x^3 + x^2 + 2xy - 3x + y^2$ kriittiset pisteet eli yhtälöparin $\nabla g = \overline{0}$ ratkaisut.

3. Muodosta yhtälön $y^5 + xy + x^2 = 13$ määräämän tasokäyrän tangenttisuora käyrän pisteessä $(3,1)$.
   Vihje: Välivaiheissa voi käyttää joko implisiittistä derivointia tai gradienttia.

4. Määritä ellipsin $x^2 + 3y^2 - 2xy = 6$ korkein ja matalin kohta etsimällä funktion $f(x, y) = y$ suurin ja pienin arvo sopivan sidosehdon vallitessa.

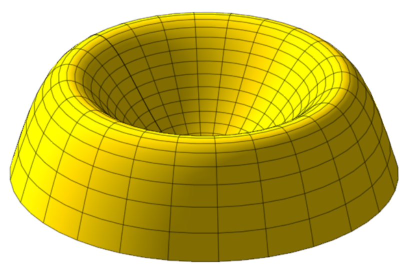
5. Kolmion K kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(2, 0)$ ja $(2, 4)$. Laske tasointegraali

$$\iint_K (6x^2 - 3y^2)\, dA.$$

6. Miljonääri valmistuttaa lemmikilleen kultaisen ruokakupin, jonka muotoa kuvaa (sopivissa yksiköissä)

$$0 \le z \le \sin(x^2 + y^2), \text{ kun } x^2 + y^2 \le \pi.$$

Laske kultaisen osan tilavuus taso- tai avaruusintegraalin avulla.



Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Muita kaavoja ilman selityksiä:

- $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$
- $dA = dx\, dy = dy\, dx = r\, dr\, d\theta$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia kevään/kesän tenttin yhteydessä, jolloin laskaripisteet otetaan huomioon ja parempi tulos jää voimaan. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.