MS-A0204, 19.2.2024, ratkaisut

Tehtävä 1

> $x := t^2; y := t - t^3$

$$x := t^2$$
$$y := -t^3 + t \tag{1.1}$$

> $diff(y, t) = 0$

$$-3\,t^2 + 1 = 0 \tag{1.2}$$

> $solve(\%)$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{1.3}$$

Ilmeisesti positiivinen parametri arvo tuottaa korkeimman kohdan.

> $subs\left(t = \frac{1}{\mathrm{sqrt}(3)}, x\right)$

$$\frac{1}{3} \tag{1.4}$$

Tangenttivektori on yleisesti muotoa $\boldsymbol{r}'(t) = 2\,t\,\mathbf{i} + (1 - 3\,t^2)\,\mathbf{j}$, josta arvoilla $t = \pm 1$ saadaan $\boldsymbol{r}'(\pm 1) = \pm 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$. Näiden pistetulo on nolla, joten leikkaus on kohtisuora.

Kaarenpituus saadaan kaavasta

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \sqrt{4\,t^2 + (1 - 3\,t^2)^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - 2\,t^2 + 9\,t^4}\,dt,$$

jossa keskimmäinenkin muoto riittää.

Lisätietoja :

> $int(\mathrm{sqrt}(1 - 2\cdot t^2 + 9\cdot t^2), t = -1..1)$

$$2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{7}\,\mathrm{arcsinh}(\sqrt{7})}{7} \tag{1.5}$$

> $evalf(\%)$

$$3.470982681 \tag{1.6}$$

Tehtävä 2

> $f := (x, y) \rightarrow \frac{x^2 + 2\cdot y^2}{2\cdot x^2 + y^2}$

$$f := (x, y) \mapsto \frac{x^2 + 2\cdot y^2}{2\cdot x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

> $f(x, 0)$

(2.2)

$$\frac{1}{2} \tag{2.2}$$

> $f(0, y)$

$$2 \tag{2.3}$$

Koska koordinaattiakseleilla saadaan eri vakioarvot, niin myös raja-arvot näitä suoria pitkin ovat erisuuret. Raja-arvoa origossa ei siis ole olemassa.

> $g := x^3 + x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x + y^2$

$$g := x^3 + x^2 + 2\,y\,x + y^2 - 3\,x \tag{2.4}$$

> $diff(g, x) = 0, diff(g, y) = 0$

$$3\,x^2 + 2\,x + 2\,y - 3 = 0, 2\,x + 2\,y = 0 \tag{2.5}$$

> $solve(\{\%\})$

$$\{x = 1, y = -1\}, \{x = -1, y = 1\} \tag{2.6}$$

Kriittisiä pisteitä on siis kaksi: $(1, -1)$ ja $(-1, 1)$.

Tehtävä 3

Kokeillaan implisiittistä derivointia:

> $y(x)^5 + x \cdot y(x) + x^2 = 13$

$$y(x)^5 + x\,y(x) + x^2 = 13 \tag{3.1}$$

> $diff(\%, x)$

$$5\,y(x)^4 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right) + y(x) + x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right) + 2\,x = 0 \tag{3.2}$$

> $solve\left(\%, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right)$

$$-\frac{y(x) + 2\,x}{5\,y(x)^4 + x} \tag{3.3}$$

> $subs(\{x = 3, y(x) = 1\}, \%)$

$$-\frac{7}{8} \tag{3.4}$$

Tangenttisuoran yhtälö on siis

> $y - 1 = \% \cdot (x - 3)$

$$y - 1 = -\frac{7\,x}{8} + \frac{21}{8} \tag{3.5}$$

> $y = solve(\%, y)$

$$y = -\frac{7\,x}{8} + \frac{29}{8} \tag{3.6}$$

Tehtävä 4

> $restart$

> $f := (x, y) \rightarrow y$

$$f := (x, y) \mapsto y \quad (4.1)$$

> $g := (x, y) \rightarrow x^2 + 3 \cdot y^2 - 2 \cdot x \cdot y - 6$

$$g := (x, y) \mapsto x^2 + 3 \cdot y^2 - 2 \cdot y \cdot x - 6 \quad (4.2)$$

> $diff(f(x, y), x) = \lambda \cdot diff(g(x, y), x),\ diff(f(x, y), y) = \lambda \cdot diff(g(x, y), y), g(x, y) = 0$

$$0 = \lambda\,(2\,x - 2\,y),\ 1 = \lambda\,(-2\,x + 6\,y),\ x^2 - 2\,y\,x + 3\,y^2 - 6 = 0 \quad (4.3)$$

Ensimmäisen yhtälön perusteella joko $\lambda = 0$ tai $x = y$. Toisen yhtälön mukaan $\lambda = 0$ ei ole mahdollinen, joten sijoitetaan $x = y$ sidosehtoon:

> $g(x, x) = 0$

$$2\,x^2 - 6 = 0 \quad (4.4)$$

> $solve(\%)$

$$\sqrt{3},\ -\sqrt{3} \quad (4.5)$$

Korkein kohta on siis $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ ja matalin kohta $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$.

Tehtävä 5

Kolmion yläreunan yhtälö on $y = 2\,x$, joten integraaliksi saadaan vaiheittain

> $restart$

> $int\left(6 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2, y = 0..2 \cdot x\right)$

$$4\,x^3 \quad (5.1)$$

> $int(\%, x = 0..2)$

$$16 \quad (5.2)$$

Tehtävä 6

Tilavuus saadaan integroimalla yläreunan funktio $\sqrt{\pi}$ -säteisessä kiekossa. Käytetään napakoordinaatistoa, jossa pinta-alan paikallinen suurennussuhde on r.

> $int\left(r \cdot \sin\left(r^2\right), r = 0..\mathrm{sqrt}(\mathrm{Pi})\right)$

$$1 \quad (6.1)$$

> $int\left(\%, \theta = 0..2 \cdot \mathrm{Pi}\right)$

$$2\,\pi \quad (6.2)$$