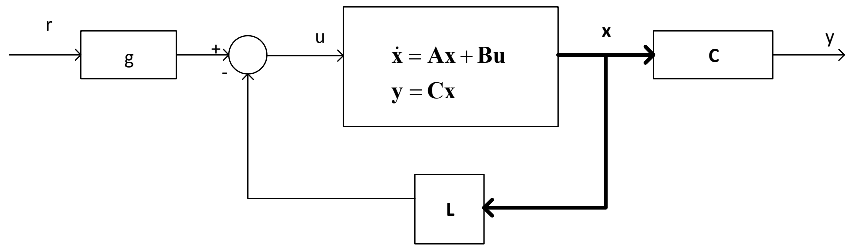
ELEC-C1230 Säätötekniikka
7. laskuharjoitus
Vastaukset

1.



a. Varsinainen prosessi on tuttua tilaesitysmuotoa:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

Kuvasta nähdään, että tilamallin sisäänmenona on $u = gr - \mathbf{Lx}$. Skalaarista ei voi vähentää matriisia, joten kun **x** on $n \times 1$-vektori, **L**:n on oltava $1 \times n$ -vektori, jolloin niiden tulo **Lx** on skalaari. Sijoitetaan u:n lauseke tilaesityksen dynamiikkayhtälöön **x**:n paikalle:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(gr - \mathbf{Lx}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{BLx} + \mathbf{B}gr = (\mathbf{A} - \mathbf{BL})\mathbf{x} + \mathbf{B}gr$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BL})\mathbf{x} + \mathbf{B}gr = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \mathbf{B}gr \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

Tiedetään: tilaesityksessä systeemin karakteristinen yhtälö on sama kuin systeemimatriisin karakteristinen yhtälö (eli ominaisarvoyhtälö), joten tilatakaisinkytketyn systeemin karakteristinen yhtälö on $\det\left(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}\right) = \det\left(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}\right) = 0$. Tämän yhtälön ratkaisuja eli järjestelmän napoja voidaan muuttaa valitsemalla **L** sopivasti.

b. Laplace-muuntamalla:

$$\begin{cases} s\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{BL})\mathbf{X} + \mathbf{B}gR \Leftrightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL})\mathbf{X} = \mathbf{B}gR \Leftrightarrow \mathbf{X} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL})^{-1}\mathbf{B}gR \\ Y = \mathbf{CX} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = \mathbf{CX} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL})^{-1}\mathbf{B}gR$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL})^{-1}\mathbf{B}g$$

c. Tilatarkkailijan dynamiikaksi oli annettu

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}\left[y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right]$$

missä **K** on vektori, jonka avulla estimaattori viritetään. Estimointivirhe on todellisen tilan ja estimaatin erotus: $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Tällöin (aikariippuvuuden merkitseminen on jätetty selvyyden vuoksi pois):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\
&= \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u}_{\dot{\mathbf{x}}} \underbrace{-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \mathbf{K}\left[y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\right]}_{-\dot{\hat{\mathbf{x}}}} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \\
&= \mathbf{A}\left(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\right) - \mathbf{K}\mathbf{C}\left(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\right) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{e} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{e} \\
&= \left(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}\right)\mathbf{e}
\end{aligned}$$

Jos saatu estimointivirheen muutosta kuvaava systeemi on asymptoottisesti stabiili, estimointivirhe menee nollaan. Muussa tapauksessa estimaatista tulee biasoitunut tai virhe kasvaa rajatta. Vektori **K** on siis syytä valita niin, että järjestelmän navat ovat vasemmassa puolitasossa sellaisissa paikoissa, että estimaattorin nopeus on haluttu.

2. Tilamalli:

$$\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{cases}$$

Tilatakaisinkytketyn systeemin karakteristinen yhtälö:

det(s**I** - **A** + **BL**) = 0.

Tämän pitää olla identtisesti sama kuin napojen asettelun ehdosta saatu karakteristinen yhtälö.

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s & -4 & 0 \\ 3 & s & -2 \\ 2l_1 & 2l_2 & s+2+2l_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= s\left(s\left(s+2+2l_3\right)+4l_2\right)+4\left(3\left(s+2+2l_3\right)+4l_1\right)$$

$=s^3 + (2 + 2l_3)s^2 + (4l_2 + 12)s + (24 + 24l_3 + 16l_1)$
$=(s + 8)(s + 12 + i4)(s + 12 - i4) = (s + 8)(s^2 + 24s + 160)$
$=s^3 + 32s^2 + 352s + 1280.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+2l_3 \equiv 32 \\ 4l_2 + 12 \equiv 352 \\ 24+24l_3+16l_1 \equiv 1280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3 = 15 \\ l_2 = 85 \\ l_1 = \dfrac{1}{16}\left(1280-24-24\cdot 15\right) = 56 \end{cases}$$

Tilatakaisinkytkennän vektori on siis: [56 85 15].

Matlab: p=[-8;-12+4*i;-12-4*i]; L=place(A,B,p);

Ohjattavuusmatriisi:

$$\mathbf{M}_c = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -12 & 0 & 8 \\ 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix},$$

rank($\mathbf{M}_c$) = 3, eli systeemi on saavutettava. (Rangi on lineaarisesti riippumattomien rivien tai sarakkeiden määrä matriisissa.)

Havaittavuusmatriisi: $$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 & 0 & 8 \\ 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

rank($\mathbf{M}_o$) = 3, eli systeemi on tarkkailtava.

Matlab: Mc=ctrb(A,B); Mo=obsv(A,C);

Rank(Mc); Rank(Mo);

Tietysti saavutettavuuden ja tarkkailtavuuden voi myös todeta siitä, että M_c:n ja M_o:n determinantit ovat nollasta poikkeavia.

3. Tilamalli:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

a. Käytetään tehtävän 1 a-kohdassa johdettua lauseketta:

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2+2l_1 & s+4+2l_2 \end{vmatrix}$$

$$= s(s + 4 + 2l_2) + 2 + 2l_1 = s^2 + (4 + 2l_2)s + (2 + 2l_1) = 0.$$

b.* Tavallinen tilasäädin jättää pysyvän poikkeaman vasteeseen silloin, kun järjestelmään vaikuttaa kuormitushäiriö. Ainoa tapa poistaa tämä poikkeama on lisätä säätimeen erosuureen integrointi. Samalla tehtävän 1 lohkokaaviossa näkyvä skaalaustekijä g muuttuu teoriassa tarpeettomaksi. (Sen avulla järjestelmän staattinen vahvistus saadaan ykköseksi ja referenssin muutoksista johtuva pysyvä poikkeama poistumaan. Integroinnilla on sama vaikutus jo itsessään.) Käytännössä voidaan g säilyttää integroinnista huolimatta, sillä se saattaa nopeuttaa vastetta.

Tarkastellaan tavallista tilaesitystä, kun referenssi oletetaan nollaksi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{1}$$

Olkoon ohjaus

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_v(t) + \mathbf{u}_I(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t) - \mathbf{L}_I\mathbf{x}_I(t) \tag{2}$$

missä $\mathbf{u}_v(t)$ on tavallinen tilatakaisinkytkentä ja $\mathbf{u}_I(t)$ riippuu erosuureesta:

$$\mathbf{u}_I(t) = -\mathbf{L}_I\mathbf{x}_I(t) = -\mathbf{L}_I\int_0^t (y_{ref}(\tau) - y(\tau))\, d\tau$$

Tässä $\mathbf{x}_I$ on uusi tilamuuttuja, jonka derivaatta on

$$\dot{\mathbf{x}}_I(t) = y_{ref}(t) - y(t) = y_{ref}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{3}$$

(Huomaa, että x_I ja samoin L_I ovat tässä yksidimensioisia eli skalaareja. Monimuuttujatapauksessa ne voivat olla myös vektoreita,) Kokoamalla yhteen yhtälöt (1) – (3) saadaan tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{L}_I \mathbf{x}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_I(t) = -\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + y_{ref}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \hdashline \dot{\mathbf{x}}_I(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L} & -\mathbf{B}\mathbf{L}_I \\ \hdashline -\mathbf{C} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hdashline \mathbf{x}_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline \mathbf{I} \end{bmatrix} y_{ref}(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{C} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hdashline \mathbf{x}_I(t) \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}^* y_{ref}(t) \\ y = \mathbf{C}^*\mathbf{x}^*(t) \end{cases}$$

Tässä on siis kirjoitettu *augmentoitu* tilavektori, joka koostuu alkuperäisen tilavektorin ja integraattorin tuoman tilan yhdistelmästä.

Tehtävässä käsiteltävän järjestelmän tapauksessa napojen tulee olla pisteessä –1. Lasketaan suljetun järjestelmän karakteristinen yhtälö ja vaaditaan, että sen juuret ovat -1. Olkoot tilatakaisinkytkennän vahvistukset

$$\begin{cases} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{L}_I = l_3 \end{cases}$$

Tällöin karakteristinen yhtälö on

$$\begin{aligned} \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*\right) &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 + 2l_1 & s + 4 + 2l_2 & 2l_3 \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} \\ &= s\left(s^2 + 4s + 2l_2 s\right) + 2s + 2l_1 s - 2l_3 \\ &= s^3 + 4s^2 + 2l_2 s^2 + 2s + 2l_1 s - 2l_3 \\ &= s^3 + \left(4 + 2l_2\right)s^2 + \left(2 + 2l_1\right)s - 2l_3 = 0 \end{aligned}$$

Järjestelmän haluttu karakteristinen yhtälö on

$$\left(s+1\right)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$$

Asettamalla kunkin asteluvun kertoimet yhtäsuuriksi saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2l_2 + 4 = 3 \\ 2l_1 + 2 = 3 \\ -2l_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{1}{2} \\ l_2 = -\frac{1}{2} \\ l_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Säätäjä voidaan nyt toteuttaa yhtälön (2) mukaisesti. Tila mitataan tai estimoidaan tilatarkkailijalla. Integraattoriin liittyvä tila x_I lasketaan yhtälön (3) mukaan, kun y_{ref} tiedetään ja prosessin lähtösuuretta $y=Cx$ mitataan.

c. Tähän johdettiin kaava tehtävän 1 b-kohdassa:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}\right)^{-1}\mathbf{B}g = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+(4+2l_2)s+(2+2l_1)}\begin{bmatrix} s+4+2l_2 & 1 \\ -2-2l_1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}g$$

$$= \frac{2g}{s^2+(4+2l_2)s+(2+2l_1)}$$

Tässä siis ja jäljempänä olevissa kohdissa käytetään säädintä ilman integroivaa ominaisuutta.

d. Toisen asteen siirtofunktion yleinen muoto on

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2},$$

missä ω_n on ominaistaajuus, ζ vaimennuskerroin ja K staattinen vahvistus. Käytetään liitteessä annettuja kaavoja ja verrataan yleisen muodon termejä c-kohdassa laskettuun siirtofunktioon:

Yksikköaskelvasteen 2%:n asettumisaika on 1.0 $s \Rightarrow$

$t_s(2\%) \approx 4/(\zeta\omega_n) = 1.0$
$\Rightarrow \zeta\omega_n = 4 \Rightarrow 2\zeta\omega_n = 8 \equiv 4+2l_2 \Rightarrow l_2 = 2.$

Vaimennussuhde:

$\zeta = 0.707 \approx \sqrt{2}/2 \Rightarrow \omega_n = 8/\sqrt{2} \Rightarrow \omega_n^2 = 32 \equiv 2 + 2l_1 \Rightarrow l_1 = 15.$

Yksikköaskelvasteen vahvistus = 1

$\Rightarrow K = 1 \Rightarrow K\omega_n^2 = 32 \equiv 2g \Rightarrow g = 16.$

e. Ohjattavuusmatriisi:

$$\mathbf{M}_c = \left[\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & 2\\2 & -8\end{bmatrix},$$

rank($\mathbf{M}_c$) = 2, eli systeemi on saavutettava.

Havaittavuusmatriisi:

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -4\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},$$

rank($\mathbf{M}_o$) = 2, eli systeemi on tarkkailtava.

f. Tilatarkkailijan karakteristinen yhtälö:

$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{KC}) = 0$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2+2 & s+4 \end{bmatrix}\right)$$

$= (s + k_1)(s + 4) + (k_2 + 2) = s^2 + (k_1 + 4)s + (4k_1 + k_2 + 2) = 0$

Haluttu polynomi on (s+16-16i)(s+16+16i) = $s^2+32s+512$. Identifioimalla parametrit saadaan $k_1=28$, $k_2=398$.

Matlab: K1=place(A',C',p); K=K1';

Selitys: Matlab osaa määrätä vektorin L, siten, että ominaisarvoille

eig(*A-BL)=p*. Ominaisarvot eivät muutu transpoosissa, joten tilatarkkailijan tapauksessa

eig(A-KC) = eig((A-KC)') = eig(A'-C'K'). Tämä on *place*-komennon ymmärtämää muotoa.

Tilatarkkailijan malli:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}\left(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 28 \\ 398 \end{bmatrix}\left(y - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -28 & 1 \\ -400 & -4 \end{bmatrix}\right)\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 28 \\ 398 \end{bmatrix}y$$