

ELEC-C1230 Sääteotekniikka

8. laskuharjoitus

Vastaukset

1. a. i. Herätteen Laplace-muunnos on

$$U(s) = L\{u(t)\} = L\{A_u \sin(\omega t)\} = \frac{A_u \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Järjestelmän ulostulon Laplace-muunnos on

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{A_u \omega}{(1+s)(s^2 + \omega^2)} = \frac{A_u \omega}{1 + \omega^2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Viimeinen muoto saadaan esim. osamurtohajotelman avulla. Viimeisen muodon termit voidaan palauttaa aikatasoon Laplace-käänteismuunnoksen avulla.

$$y(t) = \frac{A_u \omega}{1 + \omega^2} \left(e^{-t} - \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

Jatkuvuustilassa, eli kun $t \rightarrow \infty$, eksponenttitermi $e^{-t} \rightarrow 0$. Jatkuvuustilan vaste on

$$\bar{y}(t) = \frac{A_u \omega}{1 + \omega^2} \left(-\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

Trigonometriasta tiedetään, että (kaavaa ei tarvitse opetella ulkoa)

$$a \sin(\alpha) + b \cos(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(\alpha + \arctan \left(\frac{b}{a} \right) \right)$$

Kun yllä olevaa kaavaa sovelletaan jatkuvuustilan vasteeseen, se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{y}(t) = \frac{A_u}{\sqrt{1 + \omega^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega)) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$$

Vasteen amplitudi: $A_y = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} A_u$

Vasteen vaihe-ero: $\varphi = -\arctan(\omega)$

Prosessin vahvistus eli amplitudisuhde: $A = \frac{A_y}{A_u} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$

a. ii. Taajuusfunktio:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1 - j\omega}{(1 - j\omega)(1 + j\omega)} = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \omega^2} - \frac{\omega}{1 + \omega^2} j \\ &= \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{1 + \omega^2} \text{ ja } \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{-\omega}{1 + \omega^2}$$

Prosessin vahvistus:
$$A = |G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{(1+\omega^2)^2} + \frac{(-\omega)^2}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Prosessin vaihe-ero:

$$\varphi = \angle \{G(j\omega)\} = \arctan \left(\frac{-\frac{\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1}{1+\omega^2}} \right) = -\arctan(\omega)$$

Molemmilla menetelmillä saadaan luonnollisesti sama tulos.

b. Sijoitetaan kulmataajuudelle ω eri arvoja nolasta äärettömään:

Boden diagrammin alku- ja loppuarvot:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{A\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \right\} = 1 = 20 \lg(1) \text{ dB} = 0 \text{ dB},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{\varphi\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \{-\arctan(\omega)\} = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{A\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \right\} = 0 = 20 \lg(0) \text{ dB} = -\infty \text{ dB},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{\varphi\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{-\arctan(\omega)\} = -90^\circ$$

Valitaan Boden diagrammille logaritmisia ω :n arvoja (0.01, 0.1, 1, 10, 100)

$\omega = 0.01$	\Rightarrow	$A = \frac{1}{\sqrt{1+0.01^2}} \approx 1 = 0 \text{ dB}$	ja	$\varphi = -\arctan(0.01) \approx -0.57^\circ$
$\omega = 0.1$	\Rightarrow	$A \approx 0.995 = -0.043 \text{ dB}$	ja	$\varphi \approx -5.71^\circ$
$\omega = 1$	\Rightarrow	$A \approx 0.707 = -3.01 \text{ dB}$	ja	$\varphi \approx -45^\circ$
$\omega = 10$	\Rightarrow	$A \approx 0.100 = -20.04 \text{ dB}$	ja	$\varphi \approx -84.29^\circ$
$\omega = 100$	\Rightarrow	$A \approx 0.001 = -40 \text{ dB}$	ja	$\varphi \approx -89.43^\circ$

Sijoitetaan vastaavasti Nyquistin diagrammia varten ei-logaritmisia ω :n arvoja:

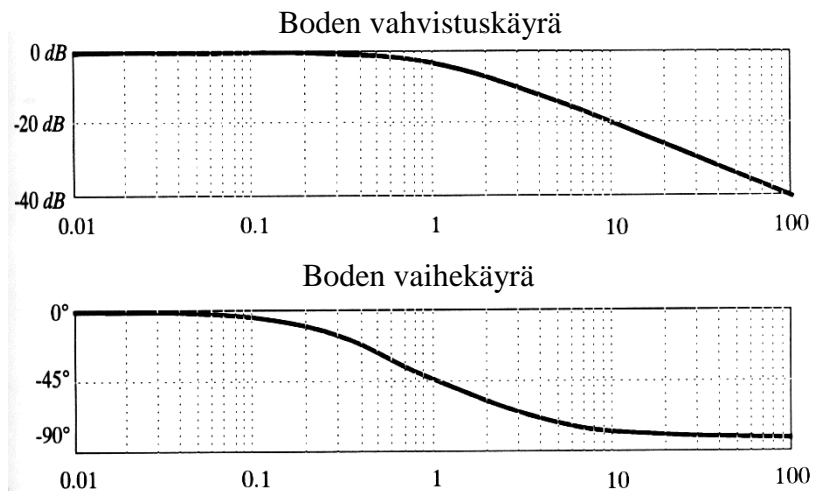
$\omega = 0$	\Rightarrow	$G(j\omega) _{\omega=0} = 1 + j \cdot 0 = 1$
$\omega = 0.5$	\Rightarrow	$G(j\omega) _{\omega=0.5} = 0.8 - 0.4j$
$\omega = 1$	\Rightarrow	$G(j\omega) _{\omega=1} = 0.5 - 0.5j$
$\omega = 2$	\Rightarrow	$G(j\omega) _{\omega=2} = 0.2 - 0.4j$
$\omega = 5$	\Rightarrow	$G(j\omega) _{\omega=5} = 0.04 - 0.2j$
$\omega = 10$	\Rightarrow	$G(j\omega) _{\omega=10} = 0.01 - 0.1j$

Lasketaan vielä Nyquistin diagrammin loppupiste:

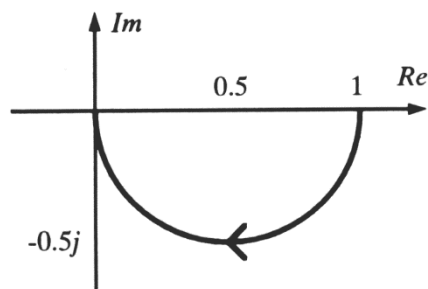
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{G(j\omega)\} = 0 + 0j = 0$$

Nyquistin diagrammi alkaa siis reaaliakselin pisteestä 1 ja päättyy origoon.

Boden vahvistuskäyrässä piirretään siis vahvistus taajuuden ω funktiona. Edellä olevien pisteiden avulla piirtäminen on helppoa ja vaivatonta. Diagrammista saadaan siis seuraavanlainen:



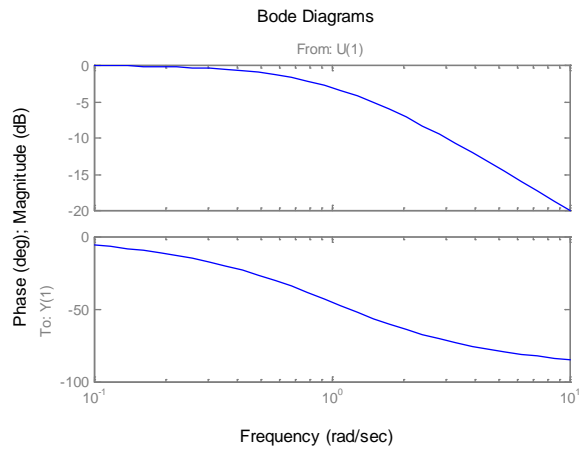
Hahmotellaan Nyquistin diagrammin muoto:



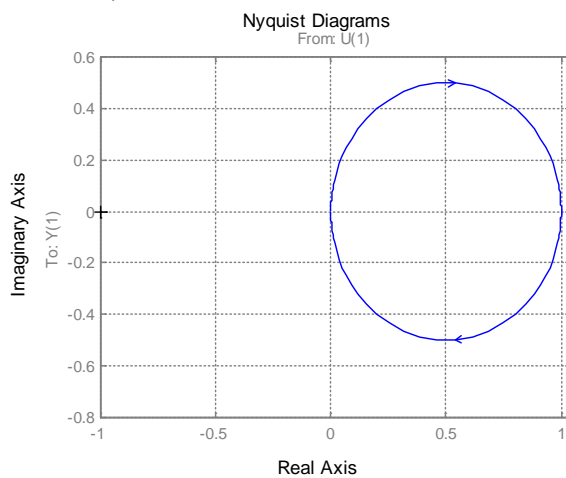
Vertaamalla Boden ja Nyquistin diagrammeja toisiinsa todetaan niiden antavan täysin saman informaation. Vaihe-ero muuttuu molemmissa diagrammeissa $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ ja vahvistus $1 \rightarrow 0$ ($0\text{dB} \rightarrow -\infty\text{dB}$). Diagrammit vastaavat toisiaan myös pisteittäin. Esimerkiksi kulmataajuuden arvolla $\omega = 1$ vahvistus on Boden diagrammissa 0.707 ja Nyquistin diagrammissa sama $\sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = 0.5\sqrt{2} \approx 0.707$. Kulmataajuudella 1 myös vaihe-ero on molemmissa diagrammeissa -45° .

Matlabilla piirtäminen tapahtuu seuraavasti.

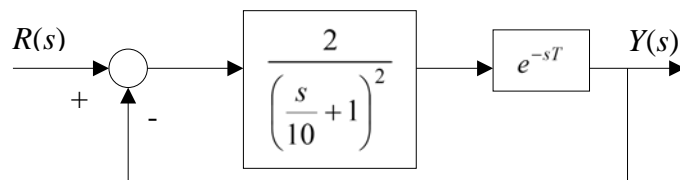
```
bode([1],[1 1])
```



`nyquist([1],[1 1])`



2.



a. $T = \pi/20$.

Tällöin avoimen silmukan siirtofunktio on:

$$G_{OL}(s) = \frac{2}{(s/10 + 1)^2} e^{-s\pi/20}$$

Vaihevara on se (pieni positiivinen) kulma, jonka vaihe eroaa arvosta -180° silloin, kun vahvistus on 0 dB eli 1. Lasketaan siis se taajuus, kun vahvistus on 1. Eulerin kaavan

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

avulla voidaan johtaa

$$|e^{j\varphi}| = |\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

jolloin myös $|e^{j\omega\pi/20}| = 1$.

$$|G_{OL}(j\omega)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{2}{1 - \omega^2/100 + j\omega/5} \cdot 1 \right| = \frac{2}{\sqrt{(1 - \omega^2/100)^2 + (\omega/5)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow (1 - \omega^2/100)^2 + \omega^2/25 = 4 \Rightarrow \omega = 10 \text{ (rad/s)}$$

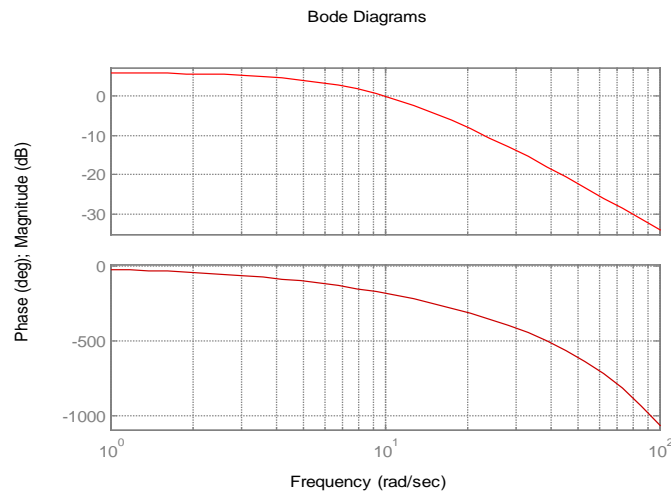
Lasketaan taajuusfunktion arvo taajuudella $\omega = 10$ rad/s:

$$G_{OL}(10j) = \frac{2}{(j+1)^2} e^{-\frac{\pi}{2}j} = \frac{2(\cos(\frac{\pi}{2}) - j\sin(\frac{\pi}{2}))}{-1 + 2j + 1} = \frac{-2j}{2j} = -1$$

$$\Rightarrow \angle(G_{OL}(10j)) = \angle(-1) = -180^\circ$$

Eli vaihevara on 0° , joten ollaan siis stabiilisuusrajalla \Rightarrow vastaus b-kohtaan on siis $\pi/20$.

Tehtävän avoimen silmukan siirtofunktion Boden diagrammi:



Hieman elegantimmin voisi ehkä laskea lähtemällä alkuperäisestä funktiosta

$$|G_{OL}(j\omega)| = \left| \frac{2}{\left(j\frac{\omega}{10} + 1\right)^2} e^{-j\omega T} \right| = \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \cdot 1 = \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$\arg G_{OL}(j\omega) = -2\arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \omega T$$

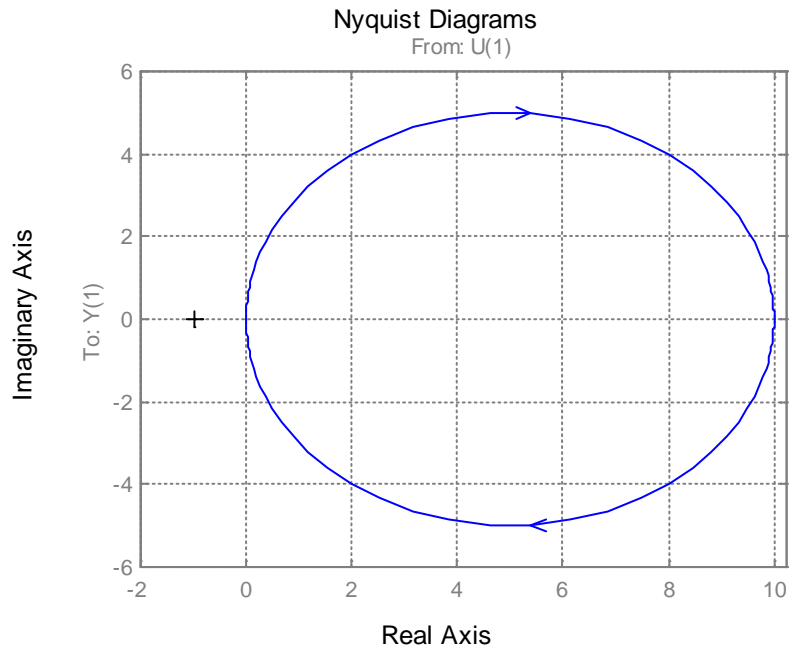
Selvästi

$$|G_{OL}(j\omega)| = 1, \text{ kun } \omega = \omega_c = 10$$

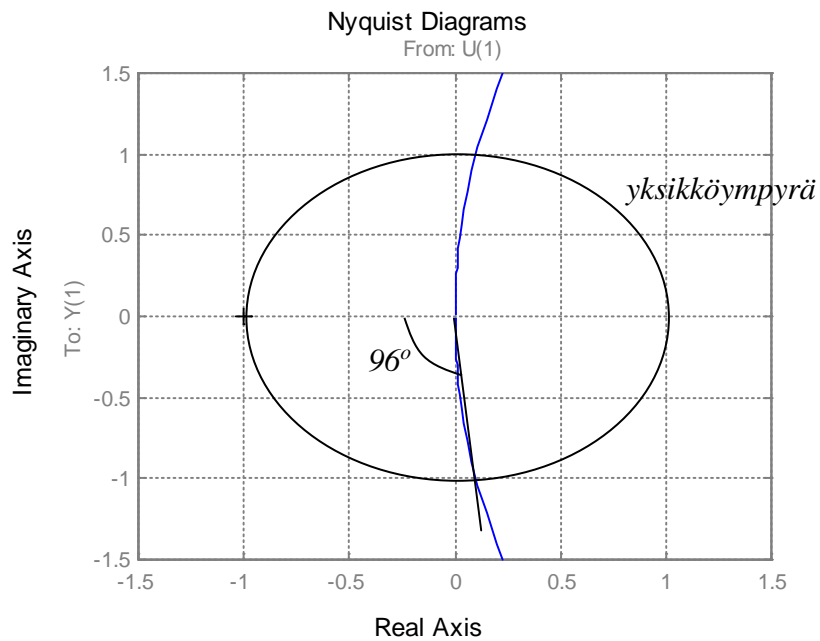
$$\arg G_{OL}(j\omega_c) = -2\arctan(1) - 10T = -2\pi/4 - 10T = -\pi$$

kun $T = \pi/20$.

3. a. $L(s) = \frac{10}{s+1}$



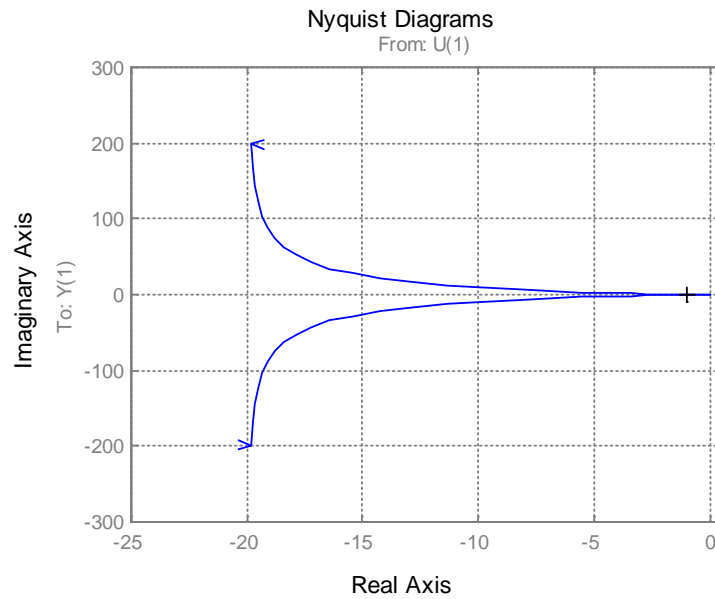
Suurennos origon lähistöltä:



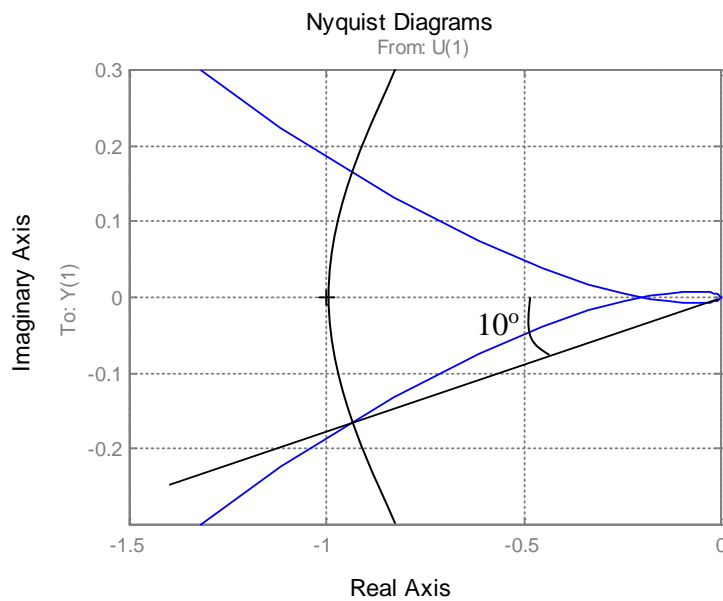
Avoimella silmukalla ei ole napoja oikeassa puolitasossa, eikä Nyquist-diagrammissa ole kiertoja -1 pisteen ympäri. Suljettu järjestelmä on siis stabiili. Vahvistusvara on ääretön. Nyquist ei leikkaa negatiivista reaaliakselia. Vaihevara noin 96° .

Kätevin tapa vahvistusvaran määrittämiseen on Matlabin funktio `margin`.

b.
$$L(s) = \frac{2}{s(s^2 + 10s + 1)}$$



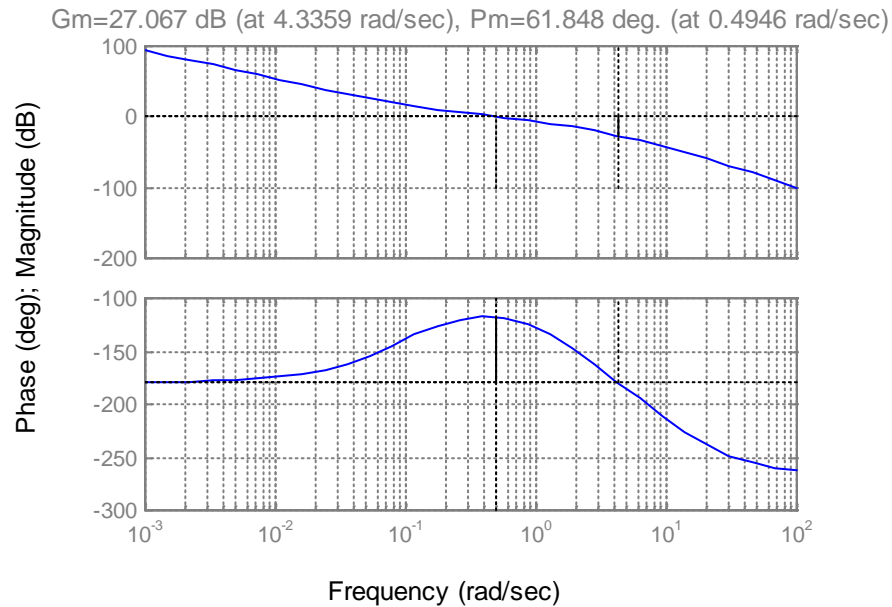
Suurennos, jossa lisäksi yksikköympyrä:



Avoimella järjestelmällä on yksi napa origossa, muttei oikeassa puolitasossa. Nyquist-diagrammissa ei ole yhtään kiertoa pisteen -1 ympäri, joten suljettu järjestelmä on stabiili. Suuri puoliympyrä muodostuu siitä, kun s kiertää Nyquistin polulla (D-käyrä) origossa olevan navan pientä puoliympyrää pitkin. Suuren puoliympyrän säde lähestyy ääretöntä, kun pienen puoliympyrän säde lähestyy nollaa. Vahvistusvara on $1/0.2 = 5 = 14$ dB ja vaihevara 10° .

4.
$$L(s) = \frac{(s+0.1)}{(s+2)(s+10)} \cdot \frac{10}{s^2}$$

Bode Diagrams



(Kuva on piirretty Matlabin margin-komennolla). Vahvistusvara (GM=Gain margin) katsotaan sieltä, missä vaihekäyrä leikkaa -180° . Tämä taajuus on 4.34 rad/s ja siellä vahvistus on 27.1 dB. Vaihevara (PM=Phase margin) katsotaan sieltä, missä vahvistuskäyrä leikkaa 0 dB (nimeltään yksikkövahvistustaajuus). Tässä tapauksessa se on 0.49 rad/s. Siellä vaihe on -118° eli vaihevara on 62° . Huomaa käyrien asymptoottinen käyttäytyminen:

- Matalilla taajuuksilla

$$L(s) \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{s^2} = \frac{5}{(j\omega)^2} = -\frac{5}{\omega^2},$$

eli vahvistus putoaa 40 dB/dekadi ja vaihe on -180° .

- Korkeilla taajuuksilla

$$L(s) = \frac{(s+0.1)}{(s+2)(s+10)} \cdot \frac{10}{s^2} \approx \frac{10s}{s^4} = \frac{10}{s^3} = -j \frac{10}{\omega^3},$$

eli vahvistus putoaa 60 dB/dekadi ja vaihe on -270° .

Minimivaiheisille systeemeille amplitudikäyrän derivaatta määrää suurin piirtein vaihekäyrän arvon. 20 dB/dekadi vastaa 90° . Mikäli järjestelmällä on nollia oikeassa puolitasossa (tai viivettä), putoaa vaihekäyrä nopeammin.