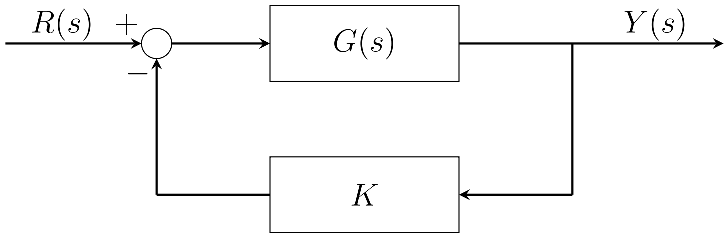
ELEC-C1230 Säätötekniikka/Kotitehtävä 3 Ratkaisut

Tehtävä 1. Tarkastellaan säätöjärjestelmää, jota kuvaa oheinen lohkokaavio



jossa $K \geq 0$ ja prosessin siirtofunktio on $G(s) = \dfrac{s+5}{s^3+4s^2+s-6}$.

a. Määritä analyyttisesti (ei kokeilemalla), millä parametrin K arvoilla järjestelmä on stabiili? (1p)

b. Piirrä järjestelmän juuriura Matlabilla. Selitä juuriuran ja a-kohdan perusteella, miten järjestelmän impulssivaste käyttäytyy K:n arvon kasvaessa. (1p)

Matlabin komentoja: *rlocus, tf*

c. Simuloi ja piirrä järjestelmän impulssivaste Matlabilla, kun $K = 1.2$, $K = 1.25$, ja $K = 5$. Ovatko tulokset b-kohdan mukaisia? (1p)

Matlabin komentoja: *impulse, tf, feedback*

Ratkaisut

a. Negatiivisen takaisinkytkennän siirtofunktio on

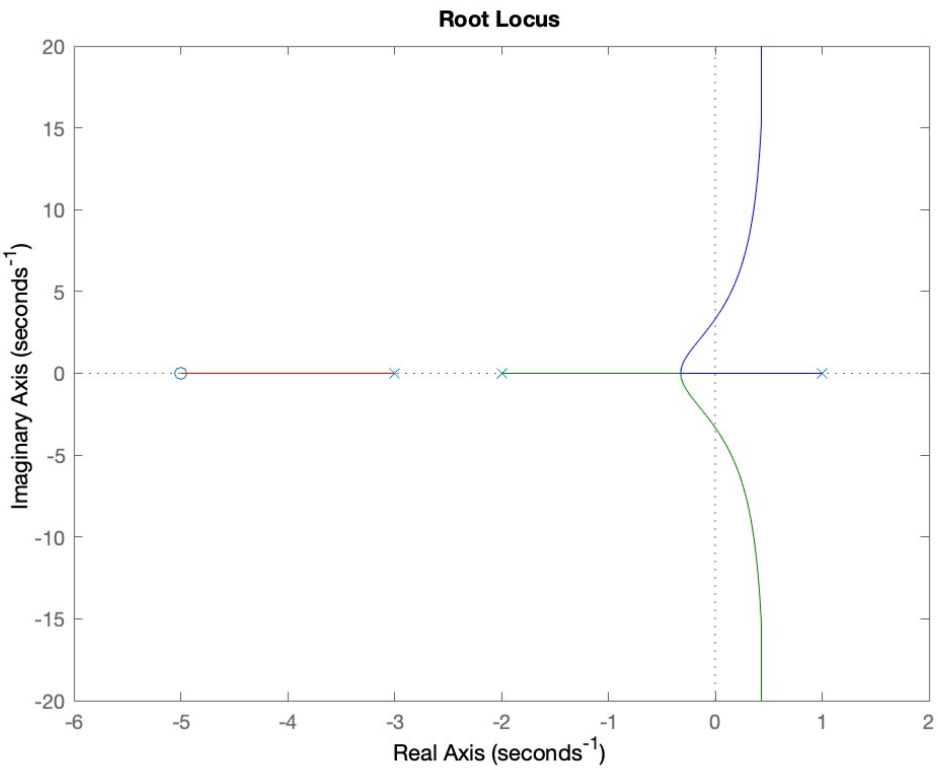
$$G_{tot}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)K} = \frac{s+5}{s^3+4s^2+s-6+(s+5)K}. \tag{1}$$

Järjestelmän navat ovat nimittäjäpolynomin nollakohdat. Määritetään Routhin kaavion avulla, millä K:n arvoilla järjestelmällä ei ole napoja oikeassa puolitasossa:

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 1+K \\
s^2 & 4 & 5K-6 \\
s^1 & -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1+K \\ 4 & 5K-6 \end{vmatrix} = \frac{10-K}{4} & 0 \\
s^0 & -\frac{4}{10-K}\begin{vmatrix} 4 & 5K-6 \\ \frac{10-K}{4} & 0 \end{vmatrix} = 5K-6 & 0
\end{array}$$

eli kun $\frac{6}{5} \leq K \leq 10$ (ei merkinvaihtoja ensimmäisessä sarakkeessa), niin järjestelmä on stabiili.

b. Järjestelmän juuriura on piirretty Kuvaan 1 Matlabin komennolla *rlocus* (Matlab-koodi dokumentin lopussa). Juuriurasta nähdään (a-kohdan avustuksella), että järjestelmä on epästabiili, kun $K < \frac{6}{5}$, ja marginaalisesti stabiili, kun $K = \frac{6}{5}$. Järjestelmän navat ovat näillä K:n arvoilla reaaliset, joten järjestelmä ei värähtele. Kun $\frac{6}{5} < K < 10$, järjestelmä on asymptoottisesti stabiili, mutta järjestelmälle tulee kompleksinen napapari (alkaen suunnilleen kohdasta $K = 1.27$), ja siten järjestelmä alkaa värähdellä. Värähtely voimistuu K:n kasvaessa. Arvolla $K = 10$ järjestelmästä tulee taas marginaalisesti stabiili, ja arvoilla $K > 10$ järjestelmä on epästabiili.



Kuva 1: Järjestelmän juuriura.

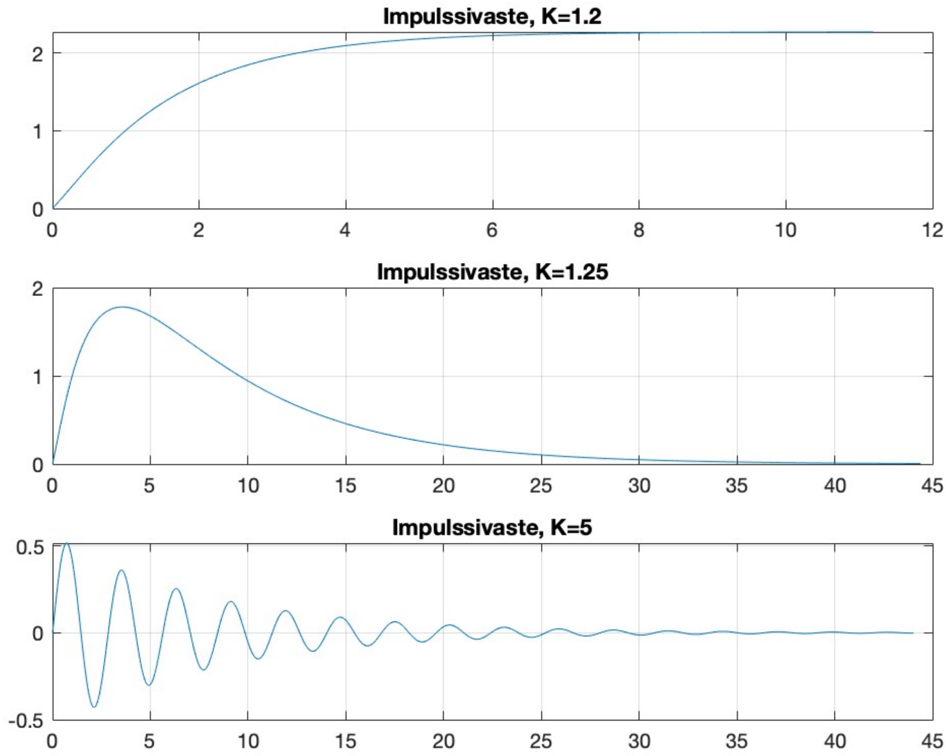
c. Järjestelmän impulssivaste kysytyillä parameterin K arvoilla on piirretty Kuvaan 2 (Matlab-koodi dokumentin lopussa).Tulokset ovat b-kohdan mukaisia:

- Kun $K = 1.2$, järjestelmä on marginaalisesti stabiili, ja sen navat ovat reaalisia, joten impulssivaste on rajoitettu, mutta ei mene nollaan eikä värähtele.
- Kun $K = 1.25$, järjestelmä on asymptoottisesti stabiili, ja sen navat ovat reaalisia, joten impulssivaste menee asymptoottisesti nollaan eikä värähtele.
- Kun $K = 5$, järjestelmä on asymptoottisesti stabiili, ja sillä on kompleksinen napapari. Täten impulssivaste menee asymptoottisesti nollaan ja on värähtelevä.

Tehtävä 2. Tarkastellaan samaa prosessia kuin Tehtävässä 1, mutta nyt tilaesityksen kautta. Tilaesityshän ei ole yksikäsitteinen, joten muodostetaan havaittava kanoninen muoto

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Säädetään prosessisa tällä kertaa tilatakaisinkytkennällä, eli $u(t) = Tr(t) - \mathbf{L}\mathbf{x}(t)$ (ks. esim. luentokalvojen Luku 6, s. 22).



Kuva 2: Järjestelmän impulssivaste eri K:n arvoilla.

a. Muodosta tilaesityksen perusteella ohjattavuusmatriisi (käsin tai Matlabilla). Onko prosessi saavutettava? (1p)

b. Määritä Matlabilla säätimen parametrit T ja $\mathbf{L}$ siten, että säädetyn järjestelmän kaikki navat ovat pisteessä -2 ja sen staattinen vahvistus on 1. (1p)

Matlabin komentoja: *place, acker*

c. Muodosta säädetyn järjestelmän tilaesitys, jossa lähtösuureina ovat sekä $y(t)$ että $u(t)$. Simuloi ja piirrä Matlabilla säädetyn järjestelmän impulssi- ja askelvasteet b-kohdan parametreilla. Kuvissa pitää siis näkyä sekä $y(t)$ että $u(t)$. (1p)

Matlabin komentoja: *ss, impulse, step*

Ratkaisut

a. Ohjausmatriisi on $\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix}$, ja se voidaan laskea Matlabissa komennolla *ctrb* (Matlab-koodi dokumentin lopussa). Saadaan

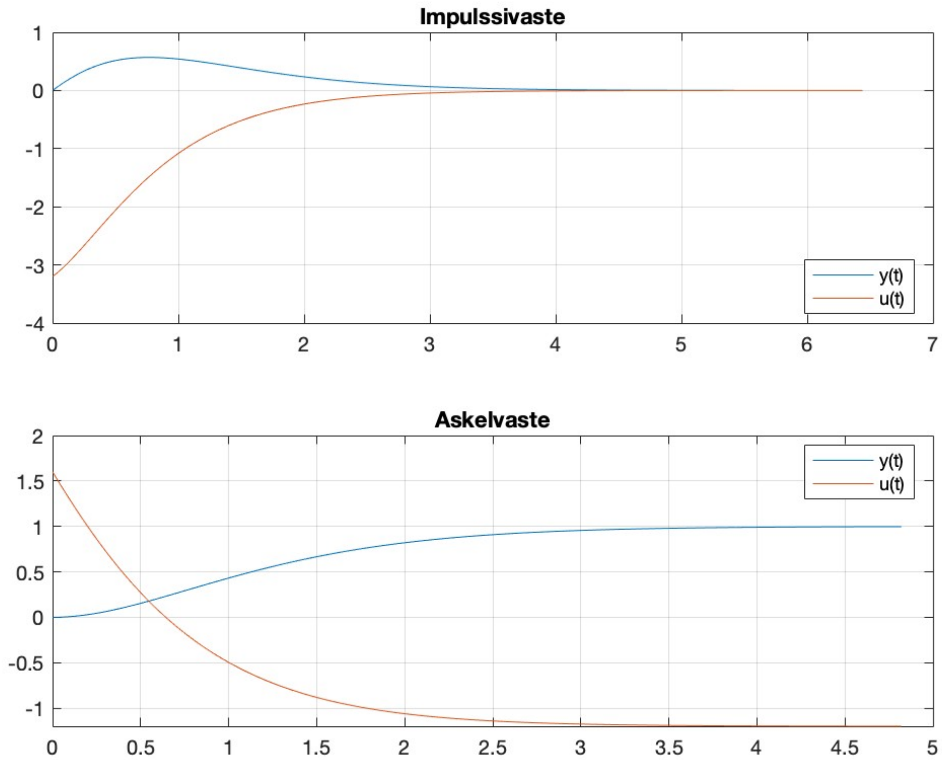
$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla tämän rangi Matlabissa komennolla *rank* saadaan, että ohjausmatriisin rangi on kolme, eli täysi, joten prosessi on saavutettava.

b. Koska prosessi on saavutettava, niin matriisin $\mathbf{A}$ navat voidaan siirtää tilatakaisinkytkennällä mielivaltaisille paikoille. Napojen siirtoon kannattaa yleisesti ottaen käyttää komentoa *place*, jos haluttujen napojen moninkerta ei ole suurempi kuin ohjausmatriisin $\mathbf{B}$ rangi. Nyt halutaan kuitenkin, että suljetulla järjestelmällä on kolminkertainen napa kohdassa -2, joten käytetään komentoa *acker* (Matlab-koodi dokumentin lopussa). Saadaan, että $\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} -0.75 & 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$. Määritellään sitten suljetun järjestelmän tilamatriisi $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BL}$. Jotta järjestelmän staattinen vahvistus olisi 1, niin ratkaistaan T yhtälöstä $\lim_{s \to 0} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} T\mathbf{B} = 1$, eli (koska T on skaalari)

$$T = \frac{1}{\mathbf{C}(-\mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}} \approx 1.6,$$

jossa (liki)arvo $T \approx 1.6$ laskettiin Matlabissa (koodi dokumentin lopussa).



Kuva 3: Säädetyn järjestelmän impulssi- ja askelvaste.

c. Säädetylle järjestelmälle määriteltiin jo $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BL}$ ja luennolta tiedetään, että $\mathbf{B}^* = T\mathbf{B}$. Normaalisti $\mathbf{C}$ ei muuttuisi, mutta koska nyt halutaan myös $u(t)$ järjestelmän lähtösuureeksi, niin joudutaan määrittelemään $\mathbf{C}^*$ ja $\mathbf{D}^*$ erikseen. Tiedetään, että $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ ja $u(t) = Tr(t) - \mathbf{L}\mathbf{x}(t)$, joten kirjoittamalla nämä matriisimuodossa saadaan

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} r(t) = \mathbf{C}^*\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^* r(t).$$

Näiden avulla voidaan muodostaa säädetyn järjestelmän tilaesitys Matlabissa ja simuloida kysytyt vasteet, jotka on piirretty Kuvaan 3 (koodi dokumentin lopussa).

```matlab
%% Tehtava 1, b-kohta
% prosessin siirtofunktio
sys = tf([1 5],[1 4 1 -6]);
rlocus(sys) % juuriuran piirto
% [r, k] = rlocus(sys); % vaihtoehtoisesti
%% Tehtava 1, c-kohta
% pyydetyt K:n arvot vektoriin
K = [1.2, 1.25, 5];
for k=1:3
        % takaisinkytkennan siirtofunktio
        sysc = feedback(sys,K(k));
        [y1, t1] = impulse(sysc);  % impulssivaste
        % piirretaan kuva
        subplot(3,1,k); plot(t1,y1)
        title(['Impulssivaste, K=', num2str(K(k))]); grid on
end
%% Tehtava 2
% tilaesityksen matriisit
A = [-4 1 0; -1 0 1; 6 0 0];
B = [0; 1; 5];
C = [1 0 0];
%% a-kohta
Mc = ctrb(A,B) % ohjattavuusmatriisi
rank(Mc) % lasketaan rangi
%% b-kohta
L = acker(A,B,[-2 -2 -2]) % napojen siirto
As = A-B*L; % saadetyn jarjestelman A
T = 1/(C*((-As)\B)) % siirtofunktion skaalaus
%% c-kohta
% loput saadetyn jarjestelman matriisit
Bs = B*T;
Cs = [C; -L];
Ds = [0; T];
% muodostetaan systeemi ss-komennolla
syss = ss(As,Bs,Cs,Ds);
% simuloidaan ja piirretaan vasteet
[y2,t2] = impulse(syss);
subplot(2,1,1); plot(t2,y2)
title('Impulssivaste')
legend({'y(t)', 'u(t)'},'location', 'best'); grid on
[y3,t3] = step(syss);
subplot(2,1,2); plot(t3,y3)
title('Askelvaste')
legend({'y(t)', 'u(t)'},'location', 'best'); grid on
```