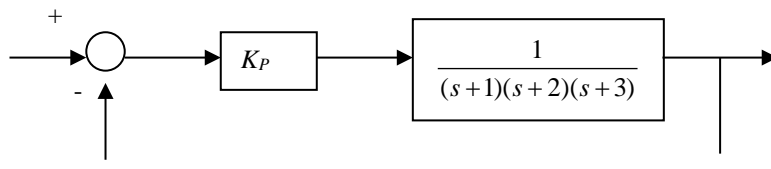


ELEC-C1230 Sääteotekniikka

10. laskuharjoitus

Vastaukset

1.



Avoimen silmukan siirtofunktion $G_{OL}(s) = \frac{K_P}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

a. Routhin kaaviota varten tarvitaan suljetun järjestelmän karakteristinen yhtälö.

K.Y. $1 + G_{OL}(s) = 0$

$$1 + \frac{K_P}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

$$(s+1)(s+2)(s+3) + K_P = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K_P = 0$$

Routhin kaavio

s^3	1	11
s^2	6	$6 + K_P$
s^1	$\frac{60 - K_P}{6}$	0
s^0	$6 + K_P$	

Säädetyllä järjestelmällä ei ole nappoja oikeassa puolitasossa, kun ensimmäisessä sarakkeessa ei ole merkinvaihtoja:

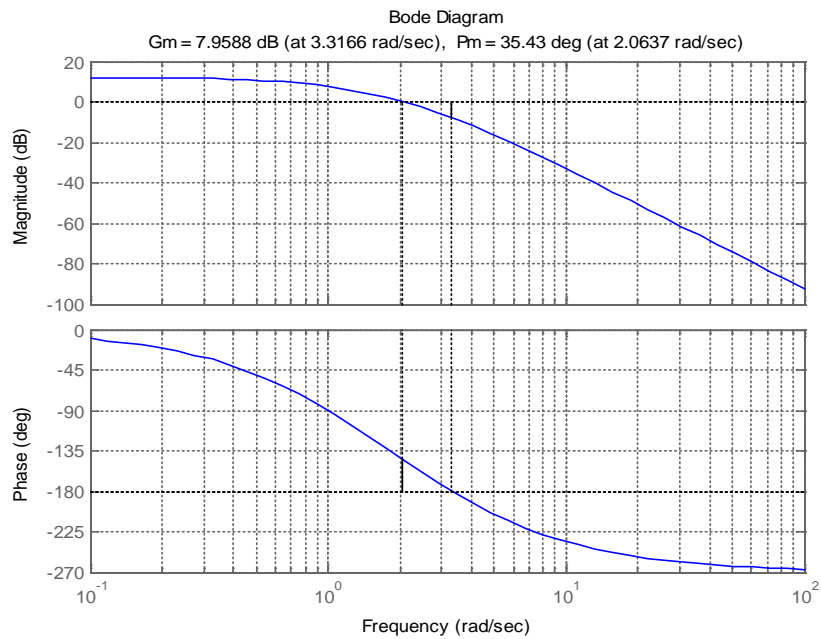
$$\begin{cases} \frac{60 - K_P}{6} \geq 0 \\ 6 + K_P \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6 \leq K_P \leq 60$$

$$\Rightarrow \text{Säädetty järjestelmä on stabiili, kun } K_P = 24$$

Vahvistusta voidaan kasvattaa 24:stä 60:een eli 2,5-kertaiseksi eli $20 \cdot \lg(2,5) \approx 8$ dB .

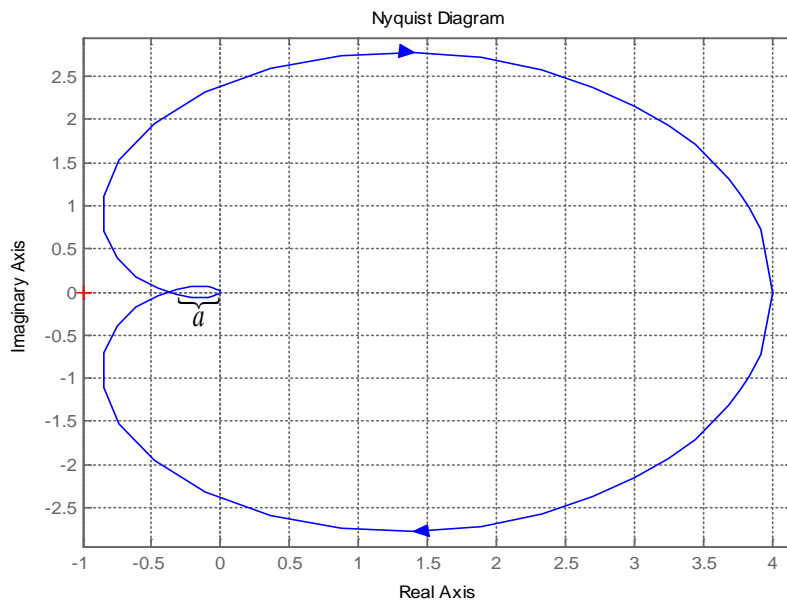
b. Luetaan Bode diagrammista vahvistusvara:



Matlabin funktio margin ilmoittaa suoraan vahvistusvaran. Bode diagrammista saadaan sama tulos kuin Routhin kaaviollakin eli 8 dB.

c. Nyquistin diagrammista vahvistusvara saadaan käyrän ja reaaliakselin leikkauspisteestä:

Vahvistusvara on $\frac{1}{a}$



$$\text{Vahvistusvara} = \frac{1}{0,4} = 2,5$$

Vahvistusta voidaan kasvattaa siis nyquistin diagrammin mukaan 2,5-kertaiseksi, joten siitäkin saadaan sama informaatio kuin muista.

2.

A. Nyquistin diagrammi kuvaa ensimmäisen asteen järjestelmää, jonka yleinen siirtofunktio on

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Tämän impulssivaste nousee välittömästi hetkellä nolla johonkin arvoon, josta se palaa eksponentiaalisesti takaisin alkutilaansa. Vaste I. näyttäisi muuten sopivalta, mutta siinä on mukana myös viive (vaste reagoi herätteeseen vasta jonkin reaalisen ajan kuluttua).

⇒ Mallille A. ei löydy vastetta.

B. Boden vahvistuskäyrässä nähdään selvä resonanssiipiikki (prosessi resonoi, mikäli herätesignaali värähtelee taajuudella, joka on lähellä prosessin ominaistaajuutta). Malli kuvaa toisen asteen värähtelevää järjestelmää, jonka yleinen siirtofunktio on:

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad |\zeta| < 1$$

Vasteet IV. ja V. värähtelevät. Vaste IV. kuvaa harmonista värähtelijää, jonka Boden vahvistuskäyrän resonanssiipiikki olisi äärettömän korkea ja terävä. Mallin B. resonanssiipiikki on laakea ja äärellisellä tasolla, joten malli kuvaa vaimenevaa värähtelijää.

⇒ Malli B. ja impulssivaste V. kuvaavat samaa järjestelmää.

C. Taajuusfunktio: $F(\omega) = G(j\omega) = \frac{\cos(\omega T) - j \sin(\omega T)}{j\omega + 1} = \frac{e^{-Tj\omega}}{j\omega + 1}$

Vastaa siirtofunktiota: $G(s) = \frac{e^{-Ts}}{\tau s + 1}$

Prosessi siis koostuu ensimmäisen kertaluvun dynamiikasta ja viiveestä. A.-kohdan päättelyn perusteella voidaan todeta impulssivasteen I. vastaavan mallia.

⇒ Malli C. ja impulssivaste I. kuvaavat samaa järjestelmää.

D. Boden vaihekäyrä kuvaa integraattoria, jonka siirtofunktio on:

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Impulssimainen heräte integraattoriin aiheuttaa askelmaisen vasteen.

⇒ Malli D. ja impulssivaste VI. kuvaavat samaa järjestelmää.

E. Boden vahvistuskäyrä kuvaa toisen kertaluvun järjestelmää, joka koostuu kahdesta reaalisesta ensimmäisen kertaluvun termistä (kaksi käännepistettä eri taajuuksilla, ei resonanssipeikkiä). Siirtofunktio on:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Toisen kertaluvun värähtelemätön impulssivaste on impulssivasteen III. kaltainen.

⇒ Malli E. ja impulssivaste III. kuvaavat samaa järjestelmää.

F. Boden vaihekäyrä kuvaa ensimmäisen kertaluvun siirtofunktiota ja derivaattoria:

$$G(s) = \frac{Ks}{\tau s + 1}$$

Jos siirtofunktion osoittaja ja nimittäjä ovat samaa astetta, on seurauksena suoravaikutusermi ⇒ Osan impulssista tulisi mennä suoraan läpi ja impulssivasteessa pitäisi olla äärettömän korkea ja äärettömän kapea piikki. Mikään esitetyistä impulsseista ei sisällä suoravaikutusermiä.

⇒ Mallia F. ei kuvaa mikään impulssivasteista.

3. Kirjallisuudessa löytyy lukuisia erilaisia parametrisointeja kompensattoreille. Luennoilla esitettiin vaiheenjohtokompensaattorille

$$G_{lead}(s) = K_0 \frac{\frac{1}{\omega_0} s + 1}{\frac{1}{k\omega_0} s + 1}, \quad k > 1$$

ja vaihenjättökompensaattorille

$$G_{lag}(s) = K_0 \frac{\frac{1}{k\omega_0} s + 1}{\frac{1}{\omega_0} s + 1}, \quad k > 1$$

Tehtävän ratkaisussa käytetään hieman toisenlaista parametrisointia. Vaihenjättökompensaattori

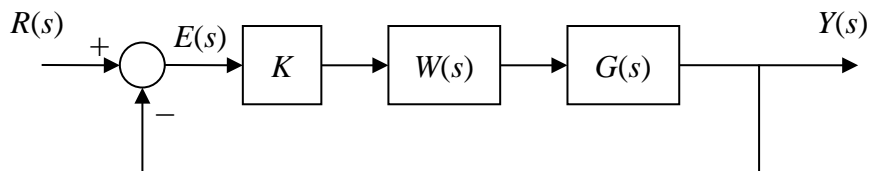
$W_{LAG}(s) = \frac{1 + a_1 \tau s}{1 + \tau s}$, $a_1 < 1$. Vastaavuus $\alpha_1 = 1/k$, $\tau = 1/\omega_0$. Huomaa, että staattinen vahvistus on 1, minkä takia otetaan erillinen vahvistustermi K mukaan. Luentokalvoissa tämä oli suoraan kompensattorin lausekkeessa (K_0).

Avoimen silmukan siirtofunktio

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s}$$

Askel 1

Säädetty järjestelmä voidaan esittää lohkokaaavana, jossa K on vahvistus, $W(s)$ on kompensattorin siirtofunktio ja $G(s)$ on säädettävän systeemin siirtofunktio.



Johdetaan lauseke erosuurelle ja tutkitaan sen jatkuvuustilan arvoa, jonka on oltava pienempi tai yhtä suuri kuin jatkuvuustilan virheelle asetettu vaatimus 2 %.

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - Y(s) \\ Y = KW(s)G(s)E(s) \end{cases} \Rightarrow E(s) = R(s) - KW(s)G(s)E(s) \Leftrightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + KW(s)G(s)}$$

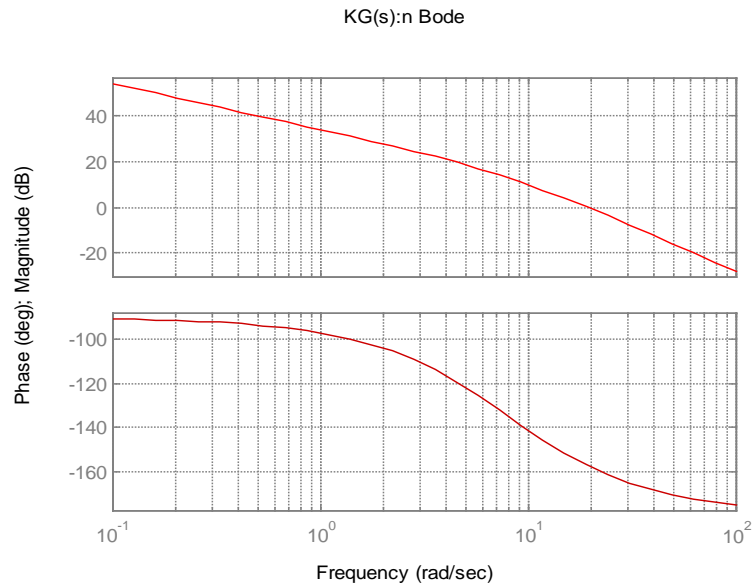
Sisääntulo $R(s)$ on yksikköramppi, jonka Laplace-muunnos on $1/s^2$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{R(s)}{1 + KW(s)G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1/s^2}{1 + K \frac{1 + a_1 \tau s}{1 + \tau s} \frac{1}{s^2 + 8s}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1/s}{\frac{(1 + \tau s)(s^2 + 8s) + K(1 + a_1 \tau s)}{(1 + \tau s)(s^2 + 8s)}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s + 8 + \tau s^2 + 8\tau s}{(1 + \tau s)(s^2 + 8s) + K + Ka_1 \tau s} \right] = \frac{8}{K} \leq 0.02 \end{aligned}$$

$\Rightarrow K \geq 400$, valitaan $K = 400$.

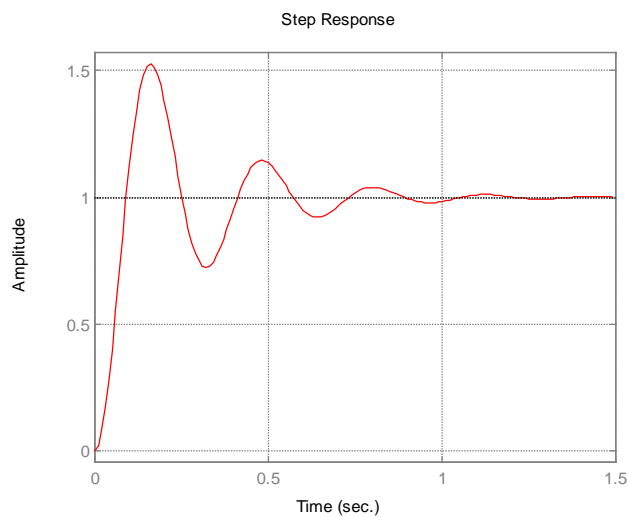
Askel 2

Piirretään seuraavaksi Boden diagrammi edellä lasketulla vahvistuksen arvolla.



Vaihevara näyttää olevan noin 23° (tarkasti ottaen 22.6°).

Simuloidaanpa vielä askelvastetta:



Ylitys näyttää ole

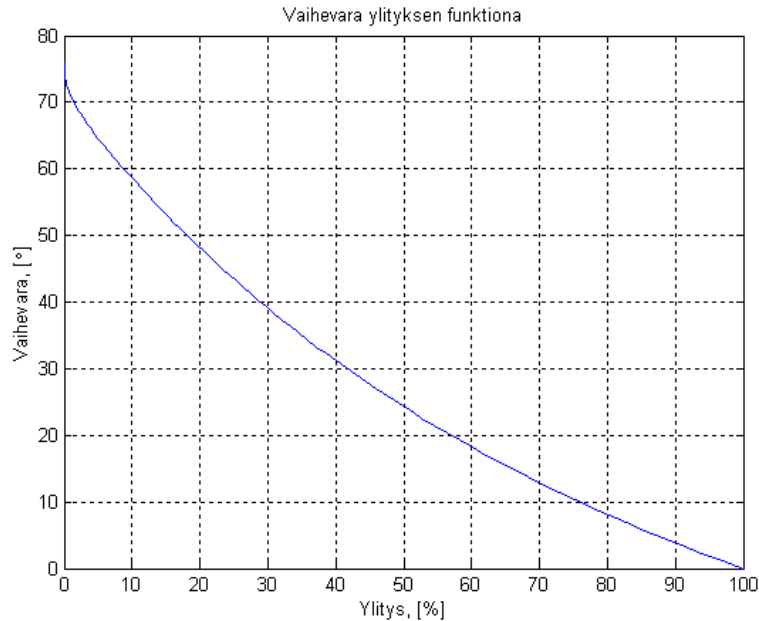
Askel 3

Yksikköaskelvasteen ylitykselle ja vaihevaralle voidaan johtaa lausekkeet vaimennuskertoimen funktiona.

$$PO = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$PM = \arctan \left(2\zeta \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4\zeta^4 + 1 - 2\zeta^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Nyt kun piirretään vaihevara ylityksen funktiona, saadaan tieto, kuinka suuri vaihevaran on oltava, jotta ylitys olisi enintään 20 %.



Dominoivien napojen approksimaation mukaan:

20 %:n yksikkövasteen ylitys \Rightarrow vaihevaraa vaaditaan 48° .

Tämä on approksimaatio, joten käytännössä tarvitaan vaihevaraa enemmän. Lähdetään hakemaan suoraan 50° vaihevaraa.

Etsitään nyt (analyttisesti) taajuus, jolla vaihevara on 50° :

$$G(i\omega) = \frac{400}{-\omega^2 + 8\omega i} = 400 \frac{-\omega^2 - 8\omega i}{\omega^4 + 64\omega^2} = 400 \frac{-\omega - 8i}{\omega^3 + 64\omega}$$

$$\Rightarrow \angle G(i\omega) = \arctan\left(\frac{-8}{-\omega}\right) = \arctan(8/\omega) = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \omega = 8/\tan(50^\circ) = 6.713 \text{ rad/s.}$$

Uusi ylitystaajuus: $\omega_c = 6.7 \text{ rad/s}$

Askel 4

Lasketaan vahvistus taajuudella $\omega_c = 6.7 \text{ rad/s}$:

$$|G(6.7i)| = \left| 400 \frac{-6.7 - 8i}{6.7^3 + 64 \cdot 6.7} \right| = 5.7 = 15.1 \text{ dB.}$$

Tämä vahvistus täytyy kompensoida. Valitaan siis $a_1 = -15.1 \text{ dB} = 0.175$

Askel 5

Ylempi leikkaustaajuus ω_1 dekadia alempana kuin uusi leikkaustaajuus ω_c , niin:

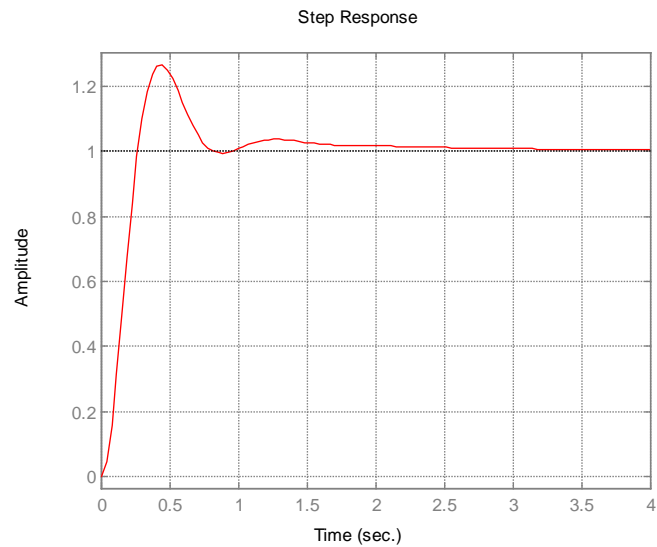
$$\omega_c = 6.7 \text{ rad/s} = 10\omega_1 = 10/a_1 \tau \Rightarrow \tau = 10/a_1 \omega_c = 10/(0.175 \cdot 6.7 \text{ rad/s}) = 8.5 \text{ s}$$

Näin saadaan seuraavanlainen kompensattori:

$$W_{Lag}(s) = \frac{1 + a_1 \tau s}{1 + \tau s} = \frac{1 + 0.175 \cdot 8.5s}{1 + 8.5s} = \frac{1 + 1.5s}{1 + 8.5s}$$

Askel 6

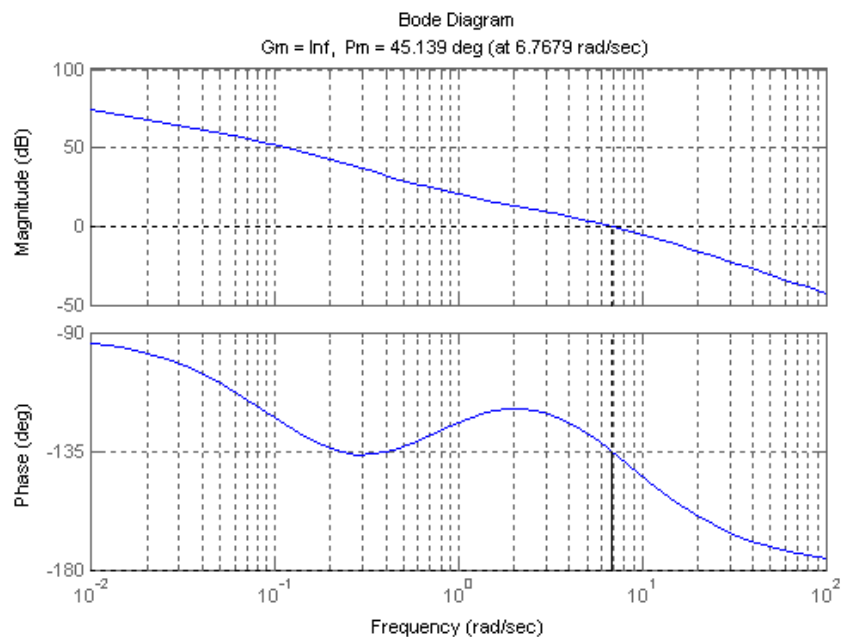
Simuloidaan säätetyn järjestelmän askelvastetta:



20 %:n ylityskriteeri ei täytynyt aivan. Tämä johtuu siitä, että suunnittelussa käytetään approksimaatiota. Parempaan tulokseen päästään vaatimalla suurempaa vaihevaraa.

Huomattava on lisäksi se, että tässä suunnittelussa ei autuaaksi tee analyttinen laskeminen. Analyttisesti laskettujen arvojen tarkkuuden pyyhkii pois kriteereissä käytetty approksimaatio. Joten: Boden diagrammin lukeminen riittää hyvin.

Piirretään vielä kompensoidun järjestelmän Boden diagrammi.



Huomataan, että vaikka lähdetään hakemaan 50 % vaihevaraa ei sitä saavuteta edellä selvitetystä seikasta johtuen.

4. Nyt käytetään kompensattoria

$$W_{Lead}(s) = \frac{1 + a_2 \tau s}{1 + \tau s}, \quad a_2 > 1$$

Vastaavuus $\alpha_2 = k$, $\tau = 1/(k\omega_0)$.

Avoimen silmukan siirtofunktio:

$$G(s) = \frac{1}{s(s/2 + 1)(s/20 + 1)}$$

Askel 1

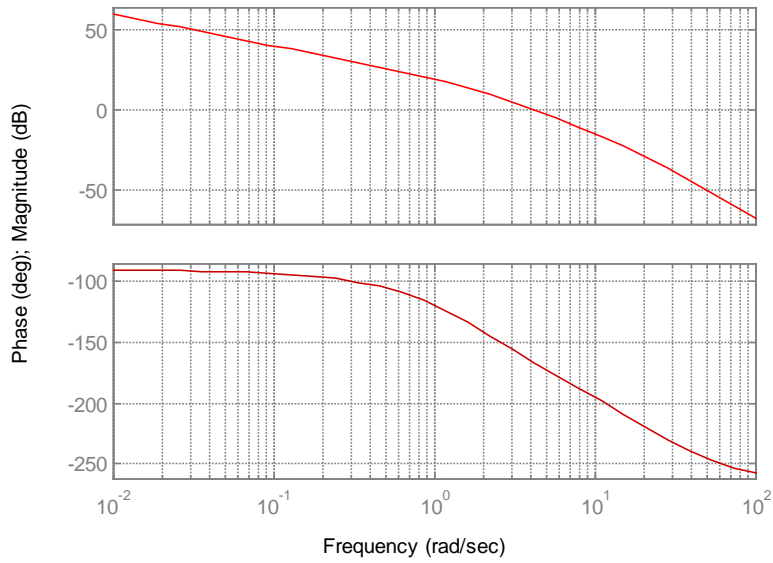
Jatkuvuustilan virhe ramppisääntulolle johdetaan kuten edellisessä tehtävässä:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{R(s)}{1 + KW(s)G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1/s^2}{1 + K \frac{1 + a_2 \tau s}{1 + \tau s} \frac{1}{s^3/40 + 11/20s^2 + s}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1/s}{\frac{(1 + \tau s)(s^3/40 + 11/20s^2 + s) + K + Ka_2 \tau s}{(1 + \tau s)(s^3/40 + 11/20s^2 + s)}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s^2/40 + 11/20s + 1 + \tau s^3/40 + 11/20\tau s^2 + \tau s}{(1 + \tau s)(s^3/40 + 11/20s^2 + s) + K + Ka_2 \tau s} \right] = \frac{1}{K} \leq 0.1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow K \geq 10$, valitaan $K = 10$.

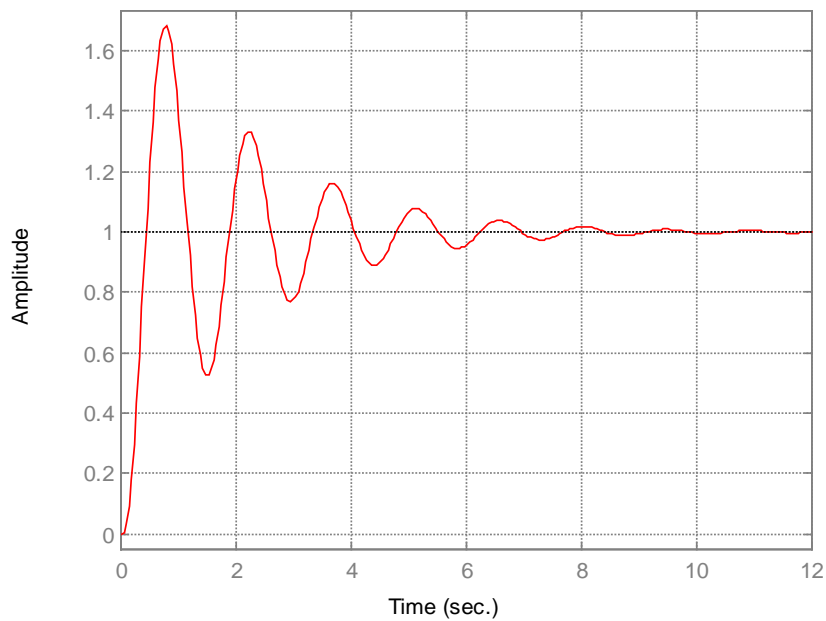
Askel 2

KG(s):n Bode



Vaihevara on 15° (tarkasti ottaen 14.2°), taajuudella 4 rad/s. Takaisinkytketyn järjestelmän askelvaste:

Step Response



Askel 3

Dominoivan napaparin approksimaation mukaan haluttu vaihevara on 48° (kuten edellisessä tehtävässä). Pyöristetään haluttu vaihevara nytkin 50 asteeseen.

Suurin vaihesiirto ϕ_{\max} tapahtuu taajuudella

$$\omega_m = 1/\tau\sqrt{a_2}$$

ja tällöin vaihesiirto on

$$\phi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a_2 - 1}{a_2 + 1}\right)$$

sekä vahvistus

$$|W(\omega_m)| = \sqrt{a_2} = 1/2 \cdot (a_2) \text{ dB.}$$

Etsitään seuraavaksi a_2 :lle sopiva arvo kokeilemalla. Muodostetaan tätä varten taulukko seuraavalla tavalla:

- Ensimmäiseen sarakkeeseen otetaan muutamia a_2 :n kokonaislukuarvoja.
- Toiseen sarakkeeseen lasketaan a_2 :n arvoja vastaavat kompensoittorin vahvistukset desibeleissä.
- Kolmanteen sarakkeeseen lasketaan a_2 :n arvoja vastaavat kompensoittorin aiheuttamat vaihesiirrot.
- Neljänteen sarakkeeseen poimitaan Boden diagrammista taajuus, jolla $|W(\omega_m)| = -|KG(\omega_m)|$. Esimerkiksi kun a_2 on 9, etsitään taajuus, jolla Boden diagrammin vahvistuskäyrä saa arvon -9.54 .
- Viidenteen sarakkeeseen poimitaan Boden diagrammista edellisen kohdan taajuutta vastaava vaihevara.
- Kuudenteen sarakkeeseen lasketaan kompensoidun järjestelmän vaihevara, joka saadaan alkuperäisen vaihevaran ja ϕ_{\max} :n summana.

a_2	$ W(\omega_m) $	ϕ_{\max}	ω_m	Alkuperäisen vaihevara	Uusi vaihevara
9	9.54	53.13	7.4	-5.2	47.9
10	10.00	54.90	7.6	-6.0	48.9
11	10.41	56.44	7.8	-6.7	49.7
12	10.79	57.80	7.9	-7.5	50.3
13	11.14	59.00	8.0	-7.9	51.1
14	11.46	60.07	8.2	-8.6	51.5
15	11.76	61.04	8.4	-9.4	51.6

Kompensoittori siis muuttaa alkuperäisen järjestelmän vahvistusta taajuudella ω_m siten, että kompensoidun järjestelmän vahvistus taajuudella ω_m on 0 dB. Vaihevara luettaisiin Boden diagrammista siltä taajuudelta, jolla vahvistus on 0 dB. Nyt kyseinen taajuus on ω_m , jolloin uusi vaihevara saadaan lisäämällä alkuperäiseen vaihevaraan kompensoittorin mukanaan tuoma vaiheen muutos taajuudella ω_m .

Taulukon perusteella valitaan a_2 :n arvoista se, jolla uusi vaihevara ylittää aiemmin asetetun vaatimuksen 50° . Otetaan varman päälle ja valitaan yhtä suurempi luku, eli $a_2 = 13$. Joten $\omega_m = 8.0 \text{ rad/s}$.

Askel 4

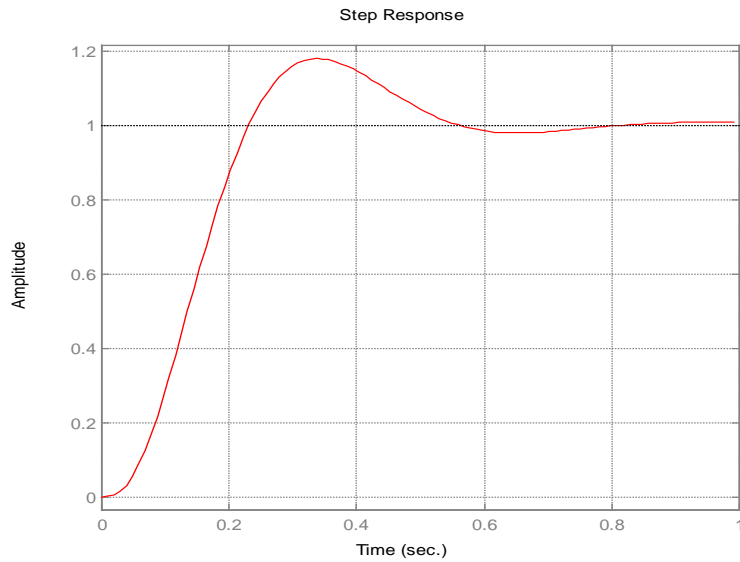
Lasketaan τ .

$$\tau = 1/\omega_m \sqrt{a_2} = 1/(8.0 \text{ rad/s} \cdot \sqrt{13}) = 0.0347.$$

Saadun vaiheenjohtokompensaattorin siirtofunktio:

$$W_{\text{Lead}}(s) = \frac{1 + a_2 \tau s}{1 + \tau s} = \frac{1 + 0.45s}{1 + 0.035s}$$

Kompensoidun systeemin askelvaste on seuraavanlainen:



Katsotaan vielä Boden diagrammit.

