ELEC-C1230 Säätötekniikka
12. laskuharjoitus

Näytteenottoteoreema, jatkuvan säätimen diskreetit approksimaatiot

1. Tutkittava signaali sisältää harmonisia värähtelyjä, joiden taajuus on

a. 1 Hz,
b. 50 Hz.

Signaalin suurin taajuus, jonka halutaan esiintyvän rekonstruoidussa signaalissa on

a. 1 Hz, **b.** 50 Hz.

Toisin sanoen nämä taajuudet laitetaan Nyquist-taajuuksien alarajoiksi.

Tämän vuoksi pitää olla:

$f_N = f_s / 2 \Rightarrow f_s = 1 / h = 2 f_N$
$\Rightarrow h = 1 / (2 f_N)$

Saadaan siis näytteenottotaajuudelle ehdot:

a. $f_N > 1$ Hz $\Rightarrow h < \dfrac{1}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$ (s),

b. $f_N > 50$ Hz $\Rightarrow h < \dfrac{1}{2 \cdot 50} = \dfrac{1}{100}$ (s).

2. Jatkuvan siirtofunktion approksimointi diskreetillä siirtofunktiolla:

$$G(s) = \frac{1}{10s+1}$$

- Tiedetään, minkälainen jatkuva-aikainen järjestelmä halutaan ja sitä pyritään approksimoimaan diskreetillä järjestelmällä

a. Eulerin menetelmässä sijoitetaan $s \to \dfrac{z-1}{h}$ $\left(z = e^{sh} \approx 1 + hs\right)$.

$$H(z) = \frac{1}{10(z-1)+1} = \frac{1}{10z-9}$$

- Stabiilista jatkuvasta järjestelmästä voi tulla epästabiili diskreetti järjestelmä. Kokeile esim:

$$G(s)=\frac{1}{s+3}$$

b. Taaksepäin derivoinnissa sijoitetaan $s \to \frac{z-1}{zh}$. $\left(z=e^{sh}\approx\frac{1}{1-hs}\right)$

$$H(z)=\frac{1}{10\frac{(z-1)}{z}+1}=\frac{z}{11z-10}$$

- Epästabiilista jatkuvasta järjestelmästä voi tulla stabiili diskreetti järjestelmä. Esim.

$$G(s)=\frac{1}{2s-1}$$

c. Tustinin menetelmässä sijoitetaan $s \to \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$ $\left(z=e^{sh}\approx\frac{1+hs/2}{1-hs/2}\right)$

$$H(z)=\frac{1}{10*2\frac{z-1}{z+1}+1}=\frac{z+1}{21z-19}$$

- Stabiilius säilyy (stabiilista jatkuvasta järjestelmästä tulee stabiili diskreetti järjestelmä ja epästabiilista tulee epästabiili).

Huom. Pidemmälle menevissä kursseissa näytetään, että riippuvuus $z=e^{sh}$ esittää todella napojen kuvautumisen diskretoinnissa s- tasosta z-tasoon. Tätä kautta saadaan myös selitys approksimaatioille, vrt. edellä ja toisaalta luentokalvot.

3. PI-säätäjä

$$G(s)=K\left(1+\frac{1}{T_{\text{int}}s}\right)$$

a. Tustinin menetelmä: $s \to \frac{2}{h}\cdot\frac{(z-1)}{(z+1)}$

Sijoitetaan *PI*-säätäjän lausekkeeseen, jolloin saadaan diskreetti approksimaatio:

$$H_T(z) = K\left[1+\frac{1}{T_{\text{int}}\frac{2}{h}\cdot\frac{(z-1)}{(z+1)}}\right] = K\left[1+\frac{h(z+1)}{2T_{\text{int}}(z-1)}\right]$$

$$= K\left\{1+\frac{h}{T_{\text{int}}}\left[\frac{z-1+2}{2(z-1)}\right]\right\} = K\left[1+\frac{h}{2T_{\text{int}}}+\frac{h}{T_{\text{int}}}\cdot\frac{1}{z-1}\right]$$

$$= K\left(1+\frac{h}{2T_{\text{int}}}\right)\left(1+\frac{2T_{\text{int}}}{2T_{\text{int}}+h}\cdot\frac{h}{T_{\text{int}}}\cdot\frac{1}{z-1}\right)$$

$$= K\left(1+\frac{h}{2T_{\text{int}}}\right)\left(1+\frac{2h}{(2T_{\text{int}}+h)(z-1)}\right)$$

Vastaavuudet ovat verrattaessa diskreettiin perussäätäjään

$$u(kh) = K_d\left(1+\frac{h}{T_{\text{int}\,d}}\cdot\frac{1}{q-1}\right)e(kh)$$

selkeästi

$$K_d = K\left(1+\frac{h}{2T_{\text{int}}}\right)$$

$$T_{\text{int}\,d} = T_{\text{int}}+\frac{h}{2}$$

b. Eulerin menetelmä: $s \to \frac{z-1}{h}$

$$H(z) = K\left(1+\frac{h}{T_{\text{int}}(z-1)}\right)$$

Inkrementtialgoritmi:

$$\frac{U}{E} = K\left(1+\frac{h}{T_{\text{int}}(z-1)}\right)$$

kerrotaan (z - 1):llä ja *E*:llä

$$(z-1)U = K(z-1)E+\frac{Kh}{T_{\text{int}}}E$$

joka on differenssiyhtälömuodossa

$$\Delta u\left(kh+h\right)=u(kh+h)-u(kh)=K\left[e\left(kh+h\right)-e\left(kh\right)\right]+\frac{Kh}{T_{\mathrm{int}}}e\left(kh\right)$$

$$u\left(kh+h\right)=u\left(kh\right)+Ke(kh+h)+K(\frac{h}{T_{\mathrm{int}}}-1)e(kh)$$

Inkrementaalialgoritmissa uusi arvo = vanha arvo + päivitys. Päivitystermi sisältää uuden informaation, tässä $e(kh+h)$.