MS-A0301 17.4.2024, ratkaisut

Tehtävä 1

> $V := \frac{4 \cdot \mathrm{Pi} \cdot R^3}{3}$

$$V := \frac{4\,\pi\,R^3}{3} \qquad (1.1)$$

> $int\left(6000 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi),\, r = 0..R\right)$

$$500\,R^3 \sin(\varphi) \qquad (1.2)$$

> $int(\%,\, \varphi = 0..\mathrm{Pi})$

$$1000\,R^3 \qquad (1.3)$$

> $T := int(\%,\, \theta = 0..2 \cdot \mathrm{Pi})$

$$T := 2000\,\pi\,R^3 \qquad (1.4)$$

> $keskiarvo := \frac{T}{V}$

$$keskiarvo := 1500 \qquad (1.5)$$

Tehtävä 2

Väite seuraa Greenin kaavasta valitsemalla $F_1 = 0$ ja $F_2 = x$, koska silloin $\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 = 1$, jonka tasointegraali on pinta-ala.

> $x := t \to t^3 - t$

$$x := t \mapsto t^3 - t \qquad (2.1)$$

> $y := t \to 1 - t^2$

$$y := t \mapsto 1 - t^2 \qquad (2.2)$$

> $x(t) \cdot y'(t)$

$$-2\,(t^3 - t)\,t \qquad (2.3)$$

> $expand(\%)$

$$-2\,t^4 + 2\,t^2 \qquad (2.4)$$

> $int(\%,\, t = -1..1)$

$$\frac{8}{15} \qquad (2.5)$$

Tehtävä 3

> *restart*

> $int(2\cdot x\cdot y\cdot z+\sin(x), x)$

$$x^2\,y\,z-\cos(x) \tag{3.1}$$

> $int(x^2\cdot z, y)$

$$x^2\,y\,z \tag{3.2}$$

> $int(x^2\cdot y, z)$

$$x^2\,y\,z \tag{3.3}$$

Tuloksista puuttuu integrointivakiot (jotka voivat riippua kahdesta muusta muuttujasta), muta näistä voidaan päätellä potentiaali

> $\varphi := (x, y)\to x^2\,y\,z-\cos(x)$

$$\varphi := (x, y)\mapsto x^2\cdot y\cdot z-\cos(x) \tag{3.4}$$

tai vielä jokin vakio lisättynä.

Viivaintegraali voidaan laskea potentiaalin avulla sijoittamalla käyrän päätepisteet:

> $x := t\to 3\cdot t;\ y := t\to 4\cdot t^2;\ z := t\to 3\cdot t^2$

$$x := t\mapsto 3\cdot t$$

$$y := t\mapsto 4\cdot t^2$$

$$z := t\mapsto 3\cdot t^2 \tag{3.5}$$

> $\varphi(x(\mathrm{Pi}), y(\mathrm{Pi}), z(\mathrm{Pi}))-\varphi(x(-\mathrm{Pi}), y(-\mathrm{Pi}), z(-\mathrm{Pi}))$

$$0 \tag{3.6}$$

Tehtävä 4

Kyseessä on funktion kuvapinta $z=f(x, y)$, joten normaaliksi saadaan
$\mathbf{N}=-f_x\,\mathbf{i}-f_y\,\mathbf{j}+\mathbf{k} = -\cos(x)\,\mathbf{i}+\sin(y)\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$.
Tällöin $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA = (-\cos(x)+1)\,dx\,dy$, joten vuoksi saadaan

> $int(1-\cos(x), x=0..\mathrm{Pi})$

$$\pi \tag{4.1}$$

> $int(\%, y=0..\mathrm{Pi})$

$$\pi^2 \tag{4.2}$$

Tehtävässä ei ole kerrottu pinnan positiviista suuntaa, joten vastaukseksi käy myös $-\pi^2$, mutta tätä ei tarvitse erikseen mainita.

Vaikka $\nabla\cdot\mathrm{F} = 0$, ei Gaussin lauseen käyttäminen näytä kovin helpolta, koska luonnollisin tapa täydentää kyseinen pinta umpinaiseksi on tarkastella pinnan ja *xy*-tason neliön $[0,\pi]\times[0,\pi]$ väliin jäävää kappaletta ja sen reunaa, mutta reunassa on viisi muuta osaa, eikä lasku näytä kovin mukavalta. Se on kuitenkin mahdollista, sillä yksikkönormaalit ja integroitavat funktiot ovat yksinkertaisia.

Tehtävä 5

> *restart*

> $F[1] := 2\cdot x + 3\cdot z; F[2] := 4\cdot x - 2\cdot y; F[3] := 5\cdot x - 6\cdot y$

$$F_1 := 2\,x + 3\,z$$

$$F_2 := 4\,x - 2\,y$$

$$F_3 := 5\,x - 6\,y \tag{5.1}$$

> $G[1] := x\cdot y\cdot z; G[2] := 0; G[3] := 0$

$$G_1 := x\,y\,z$$

$$G_2 := 0$$

$$G_3 := 0 \tag{5.2}$$

> $divF := diff(F[1], x) + diff(F[2], y) + diff(F[3], z)$

$$divF := 0 \tag{5.3}$$

> $divG := diff(G[1], x) + diff(G[2], y) + diff(G[3], z)$

$$divG := y\,z \tag{5.4}$$

Ensimmäinen kenttä on siis lähteetön, mutta toinen ei.

> $curlF[1] := diff(F[3], y) - diff(F[2], z); curlF[2] := diff(F[1], z) - diff(F[3], x);$
> $curlF[3] := diff(F[2], x) - diff(F[1], y)$

$$curlF_1 := -6$$

$$curlF_2 := -2$$

$$curlF_3 := 4 \tag{5.5}$$

> $curlG[1] := diff(G[3], y) - diff(G[2], z); curlG[2] := diff(G[1], z) - diff(G[3], x);$
> $curlG[3] := diff(G[2], x) - diff(G[1], y)$

$$curlG_1 := 0$$

$$curlG_2 := x\,y$$

$$curlG_3 := -x\,z \tag{5.6}$$

Kumpikaan kenttä ei ole pyörteetön.
Selvästi **F** ei toteuta kolmatta ehtoa, mutta **G** toteuttaa.

Tarkistetaan pyörteisyys vielä ohjelmalla:

> *with*(*VectorCalculus*)

[&x, `*`, `+`, `-`, `.`, <,>, <|>, About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, ConvertVector, CrossProduct, Curl, Curvature, D, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters, GetCoordinates, GetNames, GetPVDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector, IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis, ∇, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector, PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates, SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField, VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series] **(5.7)**

> ?*VectorField*

> $vkenttä := VectorField(\langle F[1], F[2], F[3]\rangle, \text{'cartesian'}[x, y, z])$

$$vkenttä := (2x + 3z)\bar{e}_x + (4x - 2y)\bar{e}_y + (5x - 6y)\bar{e}_z \quad \textbf{(5.8)}$$

> *Curl*(*vkenttä*)

$$(-6)\bar{e}_x + (-2)\bar{e}_y + (4)\bar{e}_z \quad \textbf{(5.9)}$$

Tehtävä 6

> *restart* :

> *with*(*VectorCalculus*)

[&x, \`*\`, \`+\`, \`-\`, \`.\`, <,>, <|>, *About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, ConvertVector, CrossProduct, Curl, Curvature*, D, *Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters, GetCoordinates, GetNames, GetPVDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector, IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis*, ∇, *Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector, PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates, SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField, VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series*] **(6.1)**

> $x := u^2; y := v^2; z := \mathrm{sqrt}(2)\cdot u\cdot v$

$$x := u^2$$
$$y := v^2$$
$$z := \sqrt{2}\, u\, v \quad \textbf{(6.2)}$$

Lasketaan tangenttivektorit osittaisderivaattoina:

> *with*(*linalg*) :

> $\mathbf{r}[u] := vector([2\cdot u, 0, \mathrm{sqrt}(2)\cdot v]); \mathbf{r}[v] := vector([0, 2\cdot v, \mathrm{sqrt}(2)\cdot u])$

$$r_u := \begin{bmatrix} 2u & 0 & \sqrt{2}\, v \end{bmatrix}$$
$$r_v := \begin{bmatrix} 0 & 2v & \sqrt{2}\, u \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.3)}$$

> $N := crossprod(\mathbf{r}[u], \mathbf{r}[v])$

$$N := \begin{bmatrix} -2\sqrt{2}\, v^2 & -2u^2\sqrt{2} & 4uv \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.4)}$$

Sijoitetaan tähän $u = v$:

> $simplify(subs(v = u, \boldsymbol{op}(\mathbf{N})))$

$$\begin{bmatrix} -2u^2\sqrt{2} & -2u^2\sqrt{2} & 4u^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.5)}$$

Yhteinen kerroin $2\sqrt{2}\, u^2$ ei vaikuta normaalin suuntaan, jolloin jäljelle jää vektori $[-1, -1, \sqrt{2}]$, jonka pituus on 2.
Tämän pistetulo yksikkövektorin **k** kanssa on $\sqrt{2}$, joten kaltevuuskulmaksi saadaan

> $solve\left(\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{sqrt}(2)}{1\cdot 2}\right)$

(6.6)

$$\frac{\pi}{4} \quad \mathbf{(6.6)}$$

> $convert(\%, degrees)$

$$45\ degrees \quad \mathbf{(6.7)}$$

Yleisen normaalivektorin pituus on

> $assume(u > 0, v > 0)$

> $norm(N, 2)$

$$2\sqrt{2\,|v|^4 + 2\,|u|^4 + 4\,|u\,v|^2} \quad \mathbf{(6.8)}$$

> $simplify(\%)$

$$2\sqrt{2}\,\left(u\sim^2 + v\sim^2\right) \quad \mathbf{(6.9)}$$

Katoksen pinta-alaksi saadaan

> $int(\%, u = 0\,..2)$

$$\frac{16\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2}\,v\sim^2 \quad \mathbf{(6.10)}$$

> $A := int(\%, v = 0\,..2)$

$$A := \frac{64\sqrt{2}}{3} \quad \mathbf{(6.11)}$$