ELEC-C3240
Elektroniikka 2

Digitaalielektroniikka
Karnaugh'n kartat ja esimerkkejä digitaalipiireistä

Materiaalia otettu myös:
https://www.allaboutcircuits.com/textbook/digital/chpt-8/introduction-to-karnaugh-mapping/

Sisältö ja alustava aikataulu (periodi IV)

6. Luento Lukujärjestelmät	Perusteet
7. Luento Loogiset operaatiot ja boolen algebra **8. Luento** Karnaugh'n kartat	Alkeismenetelmät ja käsitteet Peruspiirien suunnittelu alkeismenetelmiä käyttäen
9. Luento Tilakoneet	Monimutkaisten kokonaisuuksien luominen
10. Luento Logiikkaporttien CMOS-toteutukset	Transistoritason suunnittelu

Luennon oppimistavoite

- Oppii käyttämään Karnaugh’n karttoja logiikan sieventämisessä (2h)
- Tuntee “johdannaisfunktiot” JA-EI (NAND) TAI-EI (NOR) ja EHDOTON TAI (EXCLUSIVE OR)
- Tuntee ottovalitsimen, D-salvan ja D-kiikun toiminnan.

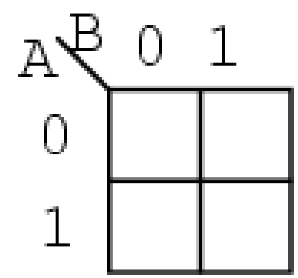
Luento+laskari+itseopiskelu=2+2+2=6h

Karnaugh'n kartta

- Loogisen funktion yleistä minimointia pidetään ongelmana “selviämättömänä” (intractable), t.s, se on teoriassa mahdollista, mutta ei käytännöllisessä ajassa.
- Kuten tiedämmen, sieventäminen on mahdollista, ja jos loogisia muuttujia on 3-5, kannattaa logiikan optimoinnissa käyttää Karnaugh’n karttaa
- Karnaugh’n kartta perustuu totuustaulun piirtämiseen muotoon, jossa muuttujien arvon kertoo ruudun sijainti kartalla
  - Tästä muodosta on helppo havaita yhtäläisyydet funktion arvon ja muuttujien arvojen välillä (=yhtenäiset 0 ja 1 alueet)
  - Graafinen tarkastelu on helpompaa ja nopeampaa kuin yhtälönratkonta

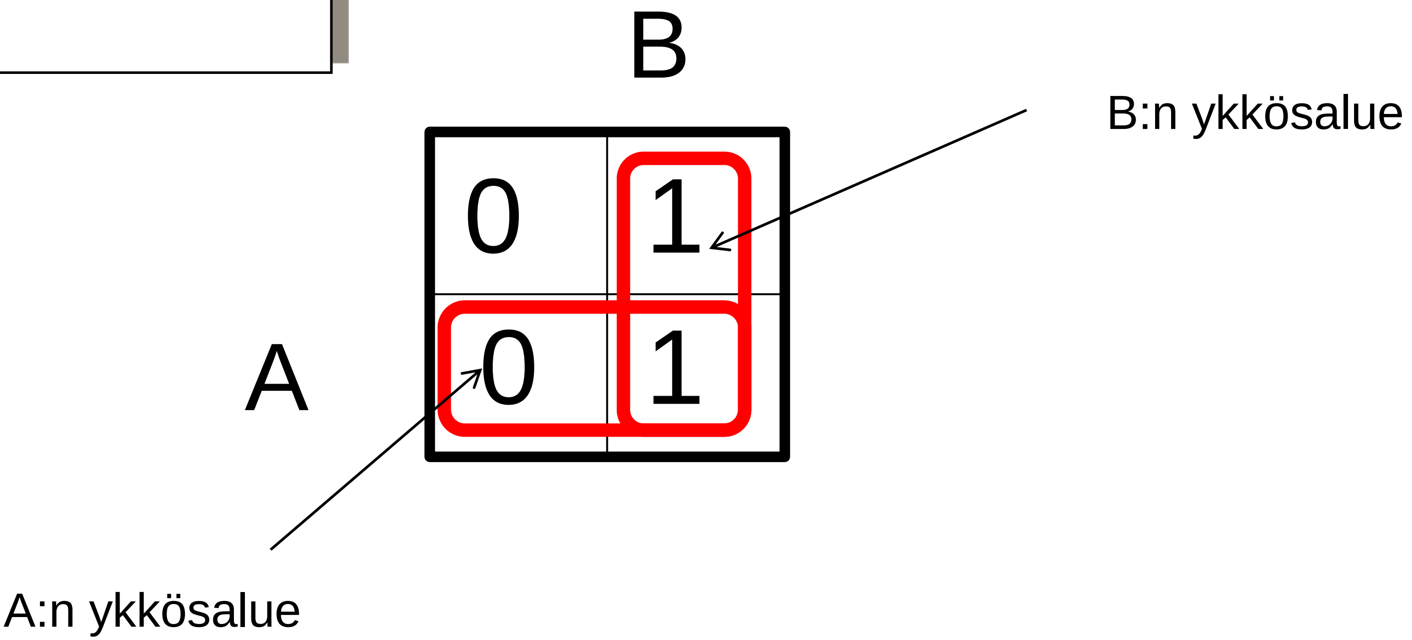
Kahden muuttujan Karnaugh'n kartta

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Kahden muuttujan Karnaugh'n kartta

	A	B	F
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1



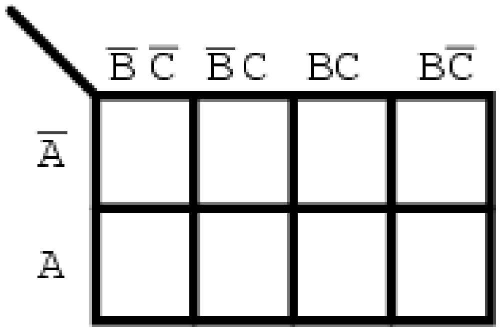
Kahden muuttujan Karnaugh'n kartta

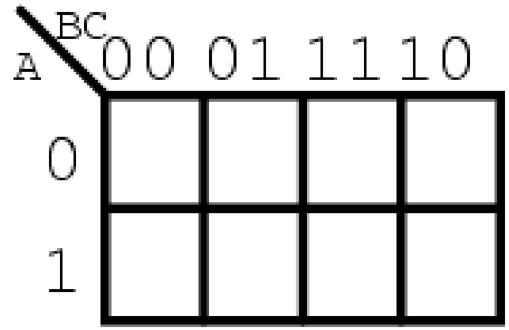
	A	B	F
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

		B
	0	1
A	0	1

$$F = B$$

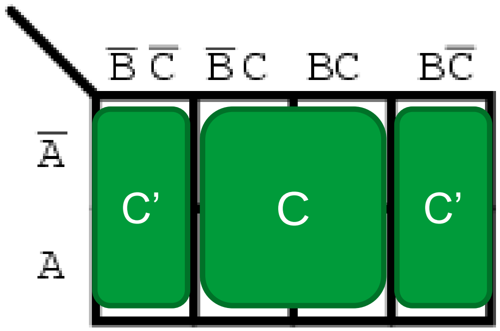
Kolmen muuttujan Karnaugh'n kartta

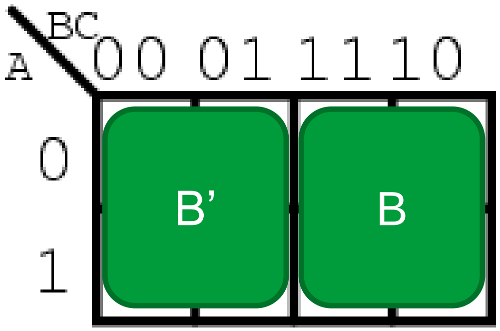




- Kolmella muuttujalla periaate pysyy samana, nyt B ja C esitetään kuitenkin yhdessä
  - Koodaus menee BC rivillä nyt 00,01,11,10 koska vain 1 bitti saa muuttua viereisillä riveillä jotta ryhmittely edelleen onnistuu!

Kolmen muuttujan Karnaugh’n kartta

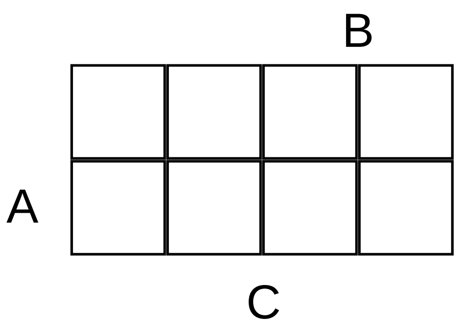


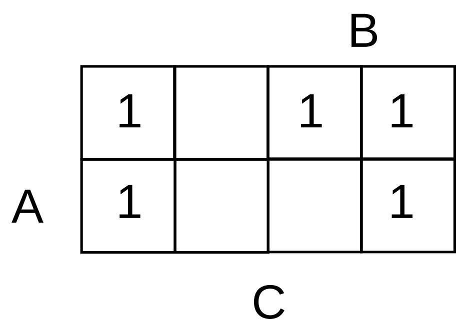


- Kolmella muuttujalla periaate pysyy samana, nyt B ja C esitetään kuitenkin yhdessä
  - Koodaus menee BC rivillä nyt 00,01,11,10 koska vain 1 bitti saa muuttua viereisillä riveillä jotta ryhmittely onnistuu!

Yksinkertaistaminen

- Kartta voidaan piirtää yksinkertaistettuna jättämällä nollat merkitsemättä.





Kolmen muttujan kartta

BC-sivu

B

A

A-sivu

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1	1	1

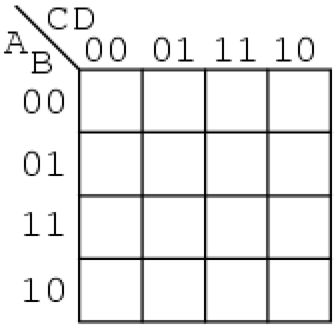
C

	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$F=A+C$$

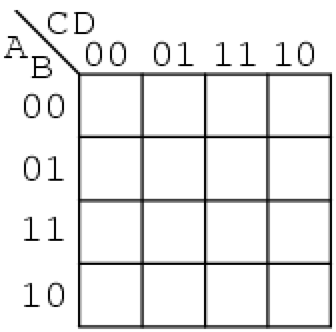
Neljän muuttujan kartta

- Neljän muuttujan karttassa AB-, sekä CD reuna muodostetaan samalla tavalla kuin kolmen muuttujan kartassa

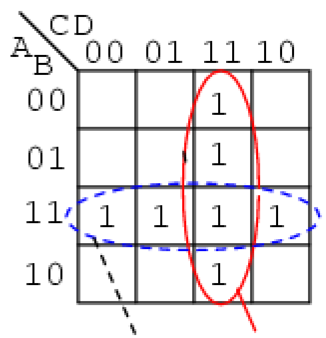


Neljän muuttujan kartta

- Neljän muuttujan karttassa myös AB reuna muodostetaan samalla tavalla kuin kolmen muuttujan kartassa



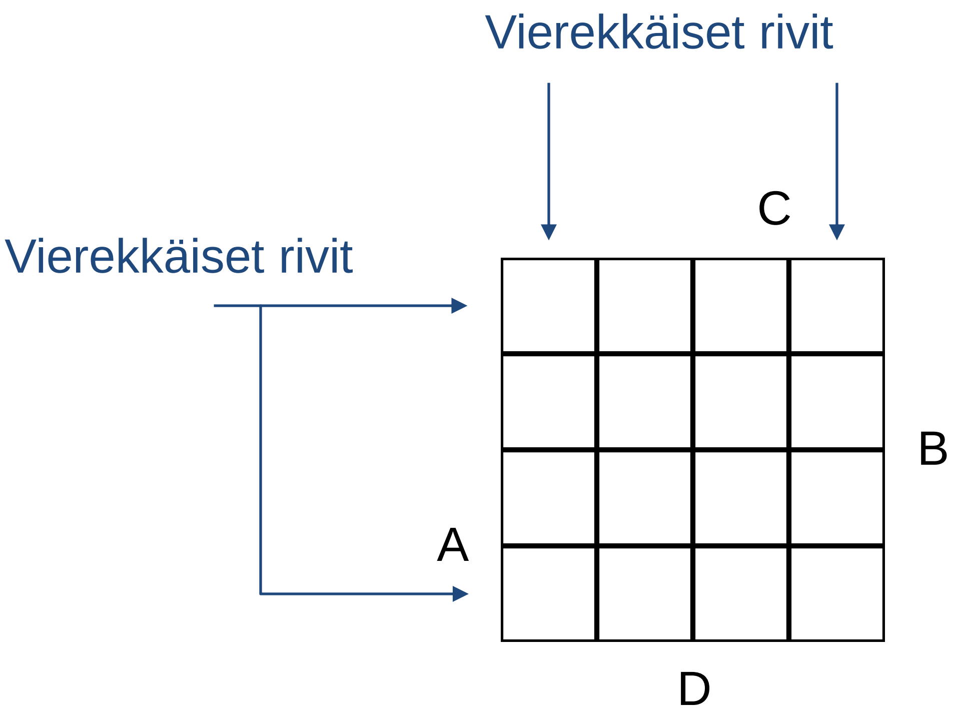
$$Out = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + ABCD + A\bar{B}CD + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D}$$



$$Out = AB + CD$$

Neljän muuttujan kartta

- Yksinkertainen esitystapa
- Huomaa “vierekkäisyydet”



Esimerkki:

C

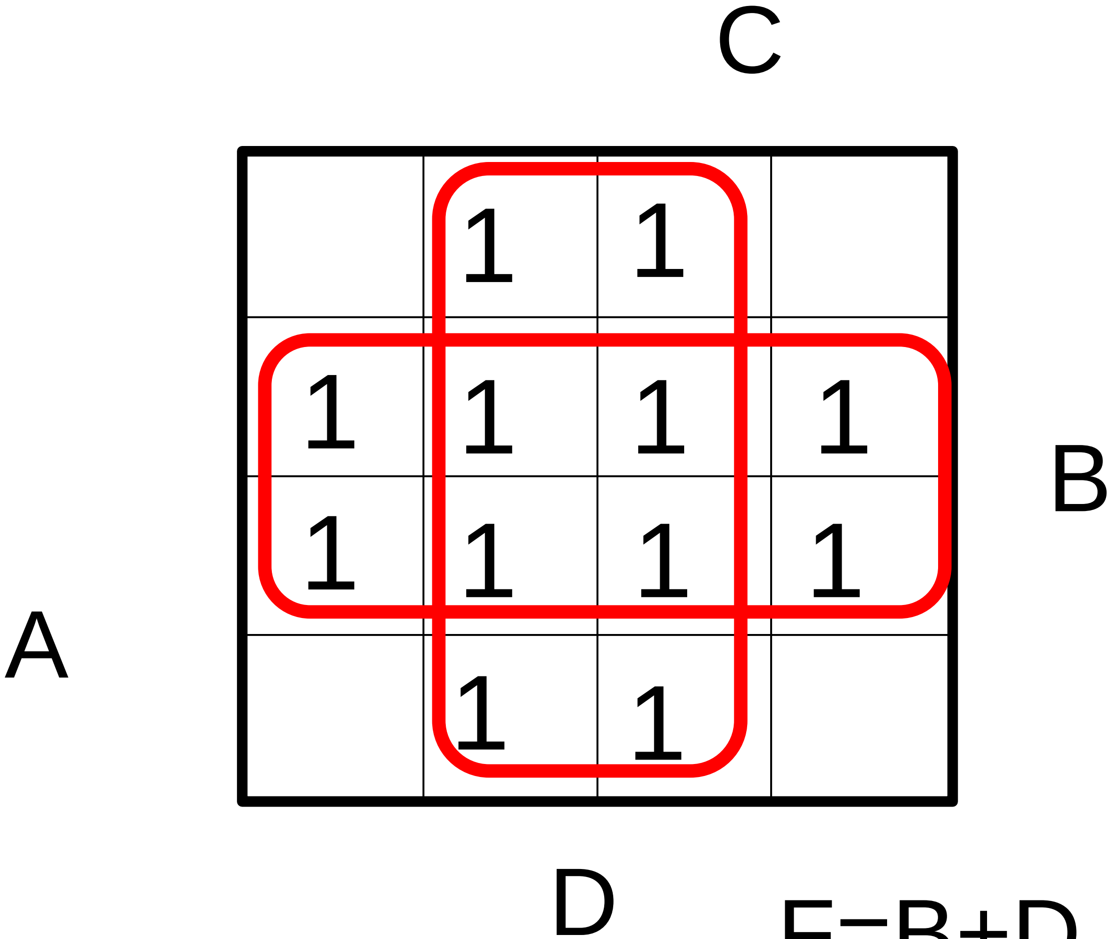
1		1	
1	1		
		1	
		1	

B

A

D

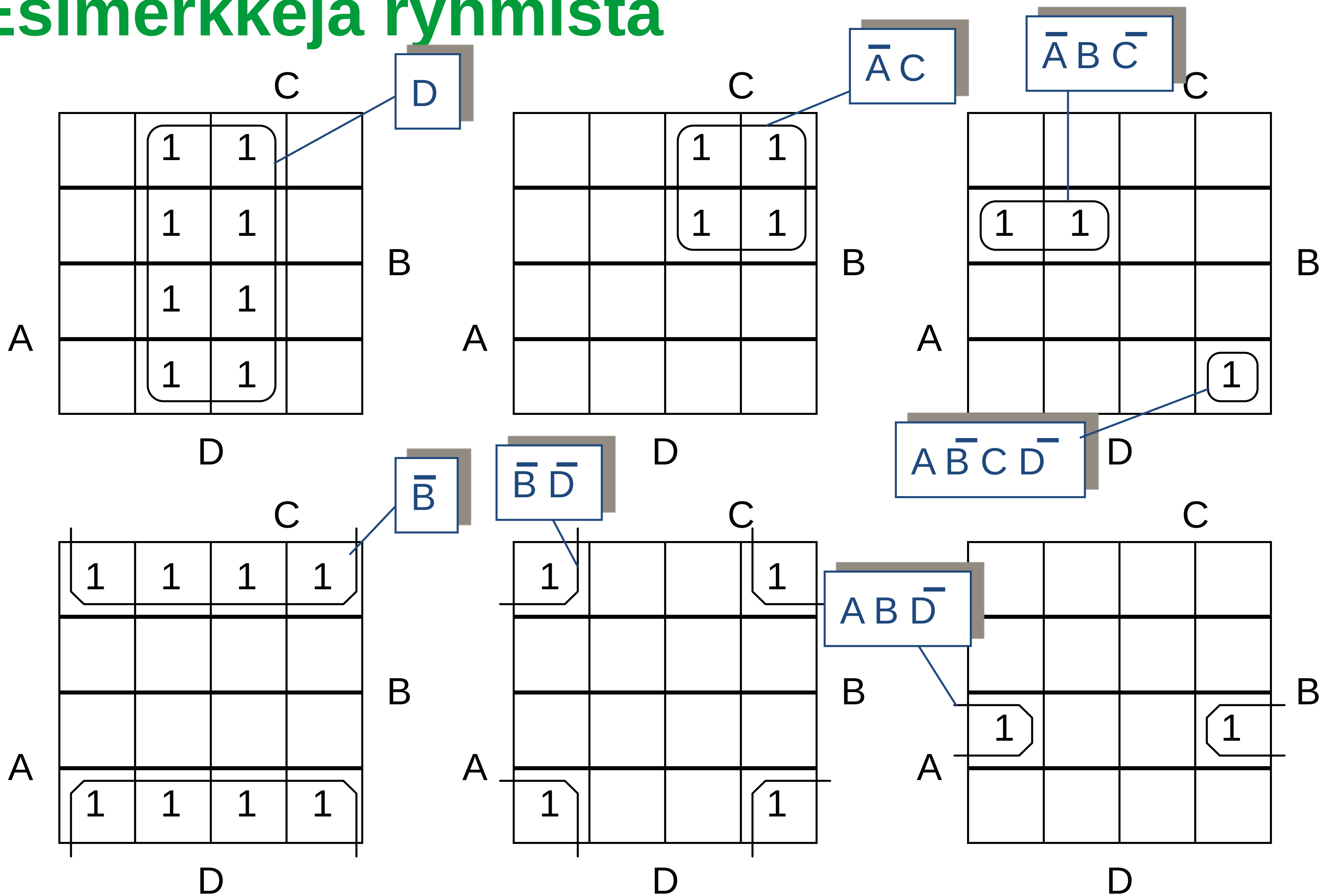
Karnaugh'n kartan etu



F=B+D

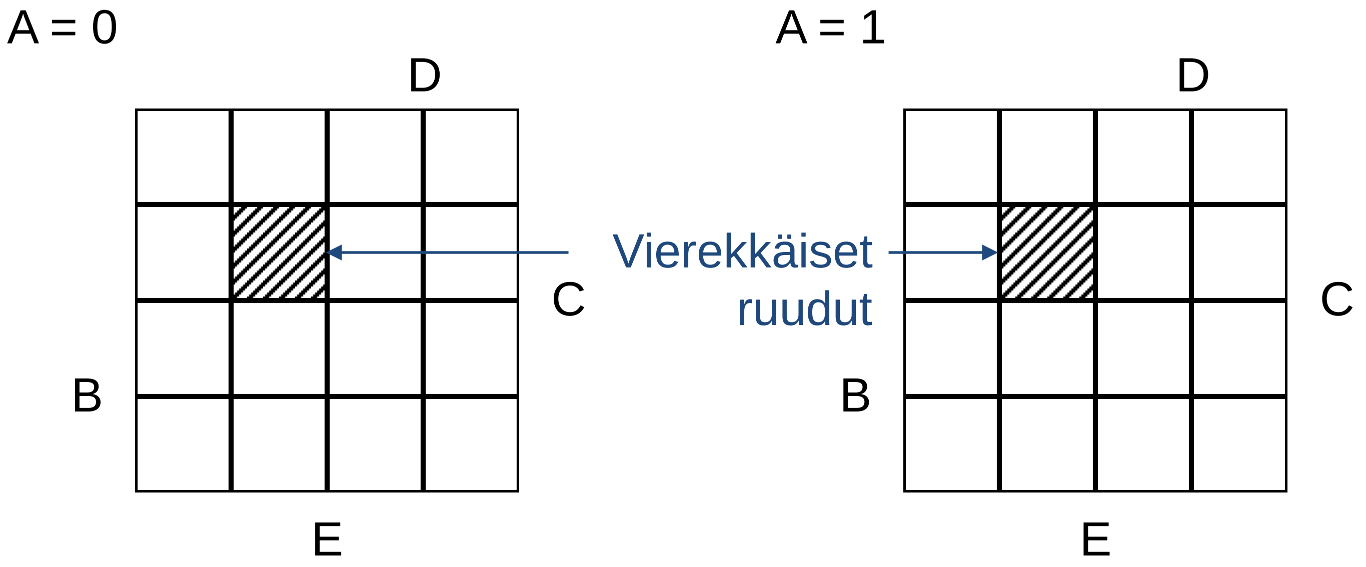
	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Esimerkkejä ryhmistä



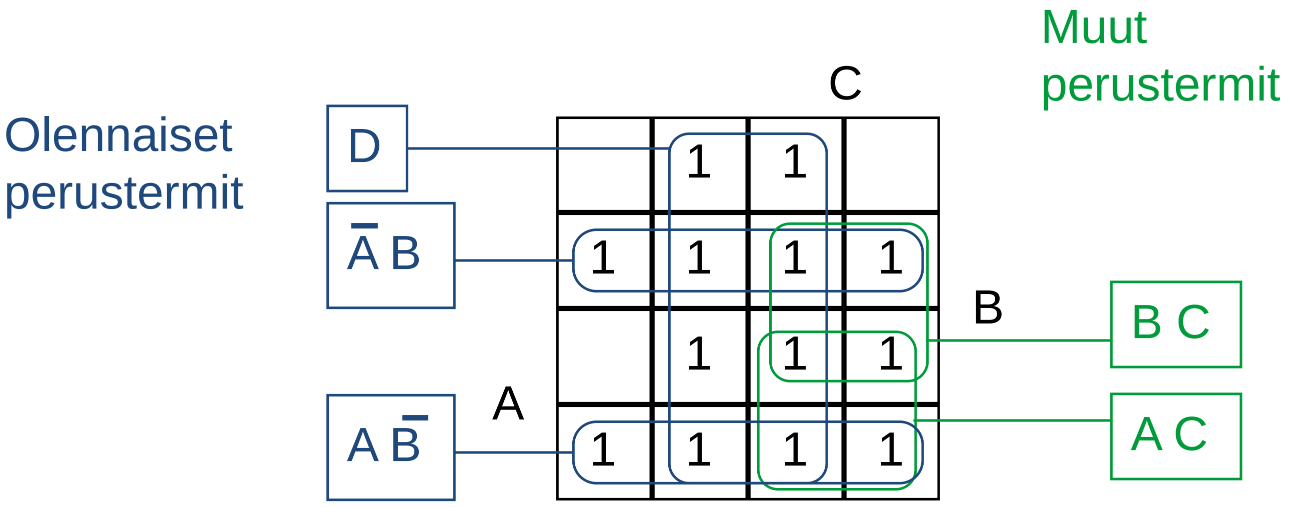
Viiden muuttujan kartta

- Kaksi erillistä karttaa, jotka ajatellaan asetetuiksi päällekkäin
- Vierekkäisyys kuten neljän muuttujan kartassa, lisäksi päällekkäiset ruudut vierekkäisiä



Perustermit ja olennaiset perustermit

- **Perustermi** (prime implicant), on termi josta ei voi poistaa yhtään muuttujaa tai muuten termi ei enää kuvaa alkuperäistä funktiota
- **Olennainen perustermi** (essential prime implicant), on termi jota ei pysty kuvaamaan millään muulla muuttujakombinaatiolla
- Funktio on aina esitettävissä perustermien summana (=complete sum, minimal covering sum, Blake canonical form), mutta tämä ei välttämättä ole minimiesitys.



D

Karnaugh'n kartan käyttö, tulojen summa(SOP)

1) Laaditaan toteutettavan funktion totuustaulu
2) Piirretään totuustaulua vastaava Karnaugh'n kartta
3) Siirretään totuustaulusta ykköset karttaan rivejä vastaaviin ruutuihin
4) Vierekkäisistä ykkösistä muodostetaan mahdollisimman suuria 1:n, 2:n, 4:n, 8:n jne ykkösen ryhmiä, kunnes kaikki ykköset kuuluvat johonkin ryhmään; tietty ykkönen saa kuulua useaan ryhmään
5) Valitaan ryhmistä olennaisia perustermejä vastaavat ryhmät ja lisäksi muita mahdollisimman suuria ryhmiä, kunnes kaikki ykköset ovat ainakin yhdessä ryhmässä
6) Muodostetaan ryhmiä vastaavien tulotermien looginen summa; se on yksinkertaisin totuustaulua vastaava tulojen summamuotoinen kytkentäfunktio

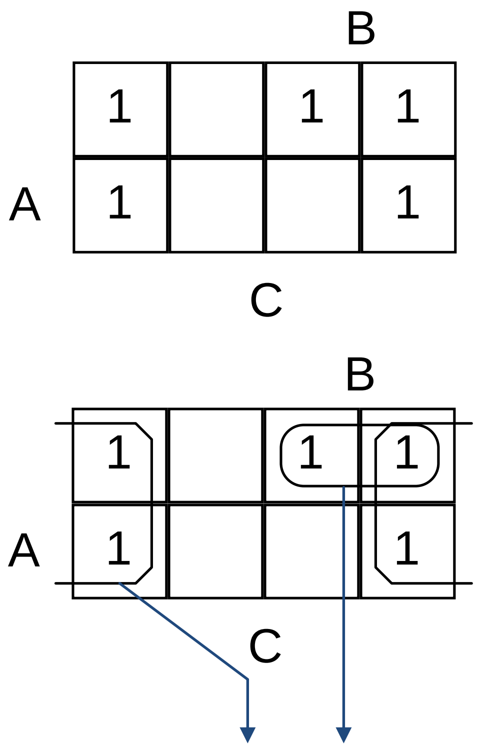
- Esitys ei välttämättä ole yksikäsitteinen; joissakin tapauksissa on useita yhtä yksinkertaisia esityksiä

Esimerkki 1: 3 muuttujaa, SOP

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Esimerkki 1: 3 muuttujaa, SOP

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



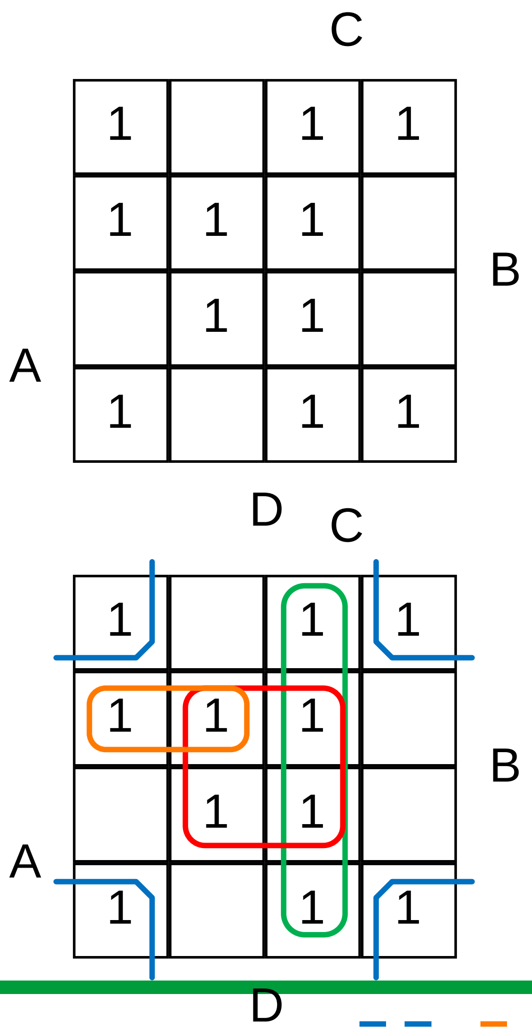
$$F = \bar{C} + \bar{A}\,B$$

Esimerkki 2, 4 muuttujaa, SOP:

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Esimerkki 2, 4 muuttujaa, SOP:

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



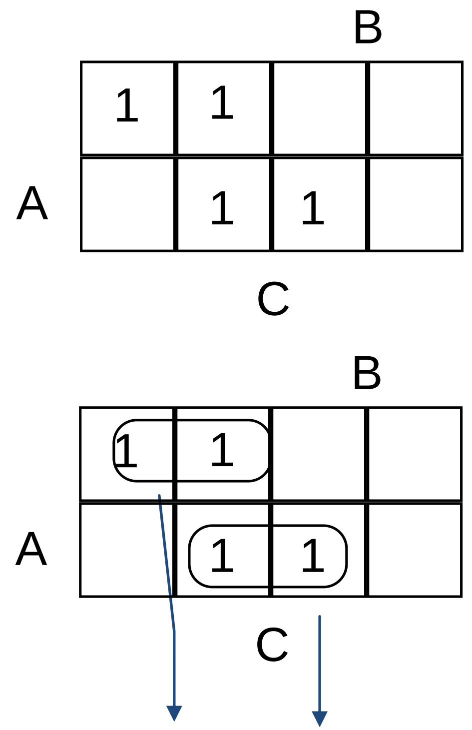
$F = BD + CD + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}$

Harjoitus: 3 muuttujaa, SOP

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Harjoitus: 3 muuttujaa, SOP

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



F = A’ B’ + A C

Karnaugh'n kartan käyttö, summien tulo (POS)

1) Laaditaan toteutettavan funktion totuustaulu
2) Piirretään totuustaulua vastaava Karnaugh'n kartta
3) Siirretään totuustaulusta **nollat** karttaan rivejä vastaaviin ruutuihin
4) **Vierekkäisistä nollista** muodostetaan mahdollisimman suuria 1:n, 2:n, 4:n, 8:n jne ryhmiä, kunnes kaikki nollat kuuluvat johonkin ryhmään; tietty nolla saa kuulua useaan ryhmään
5) Valitaan ryhmistä olennaisia perustermejä vastaavat ryhmät ja lisäksi muita mahdollisimman suuria ryhmiä, kunnes kaikki nollat ovat ainakin yhdessä ryhmässä
6) Muodostetaan ryhmiä vastaavien summatermien looginen tulo; se on yksinkertaisin totuustaulua vastaava summien tulomuotoinen kytkentäfunktio

- Esitys ei välttämättä ole yksikäsitteinen; joissakin tapauksissa on useita yhtä yksinkertaisia esityksiä

Karnaugh'n kartan käyttö, POS

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Karnaugh'n kartan käyttö, POS

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

			B	
		0		
A		0	0	
		C		

			B	
		0		
A		0	0	
		C		

F' = A C + B' C

F = (A' + C') (B + C')

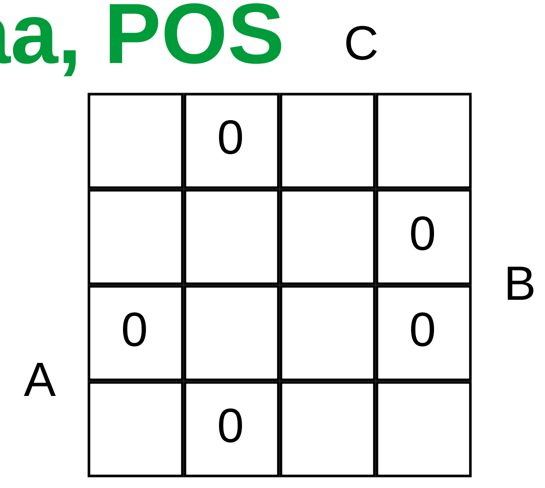
Esimerkki 2: 4 muuttujaa, POS

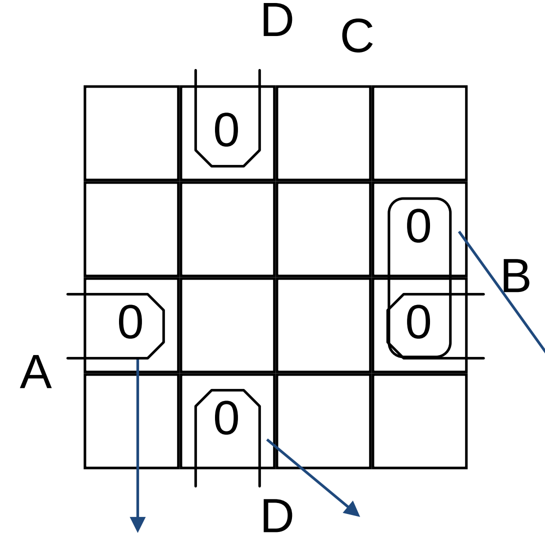
A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$F = (A + B + D)\ (B + C + D)\ (B + C + D)$$

Esimerkki 2: 4 muuttujaa, POS

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1





$$F = (\overline{A} + \overline{B} + D)\,(B + C + D)\,(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$$

Epätäydellisesti määritellyt kytkentäfunktiot

Esimerkki:

- Toisinaan kytkentäfunktion arvolla tietyllä tai tietyillä muuttujien arvoyhdistelmillä ei ole merkitystä
  - yhdistelmä ei koskaan voi esiintyä
  - arvolla ei muutoin ole merkitystä
- Vastaavaa minimitermiä nimitetään hälläväliä-termiksi (don't care term)
- Tällöin arvo voidaan jättää määrittelemättä: sanotaan, että kytkentäfunktio on **epätäydellisesti määritelty**
- Totuustauluun kyseiseen kohtaan merkitään X
- Jos kytkentäfunktio määritellään minimitermien avulla, määritellään erikseen hälläväliä-termit

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	X
1	1	0	1
1	1	1	0

$F(A, B, C) = \sum m(0, 2, 3, 6)$

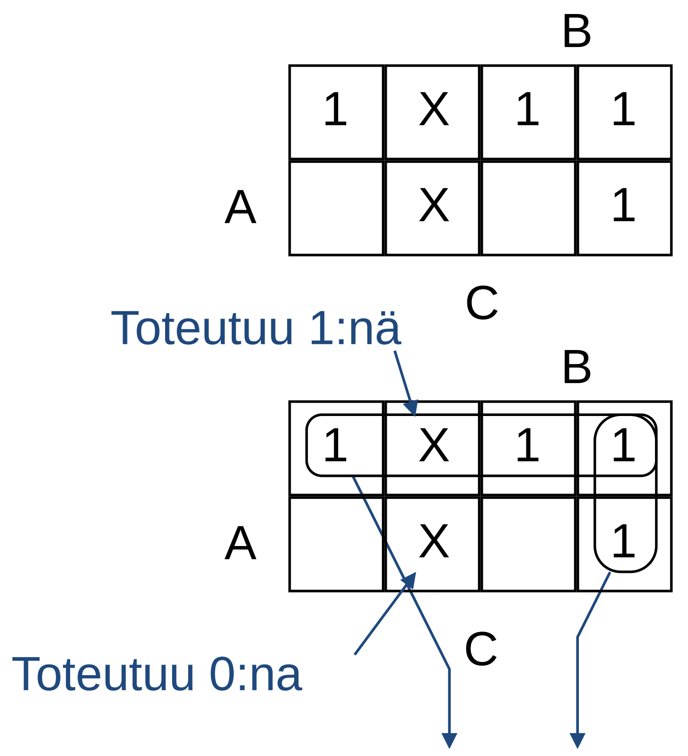
$d(A, B, C) = \sum m(1, 5)$

Hälläväliä-termit sieventämisessä

- Merkitään Karnaugh'n karttaan X:llä
- Tulkitaan kukin erikseen 0:ksi tai 1:ksi sen mukaan, kumpi johtaa yksinkertaisempaan lausekkeeseen
- Lausekkeena määritelty kytkentäfunktio on aina yksikäsitteinen: funktiolla on aina jokin arvo

Esimerkki hälläväliä-termeistä

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	X
1	1	0	1
1	1	1	0

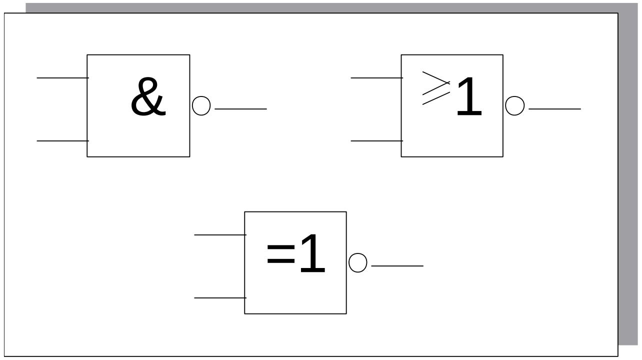


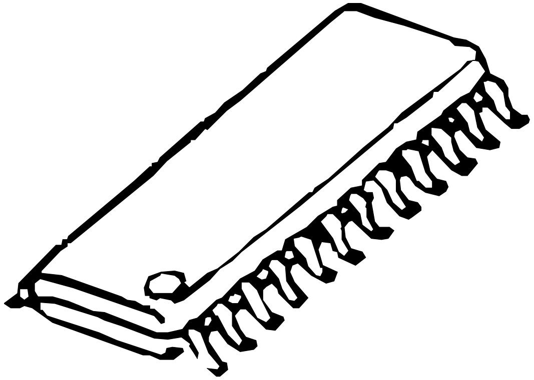
$$F = \bar{A} + B\,\bar{C}$$

“Johdannaisfunktiot”

“Johdannaisfunktiot”

- JA-EI- ja TAI-EI -portit
- EHDOTON-TAI-portti

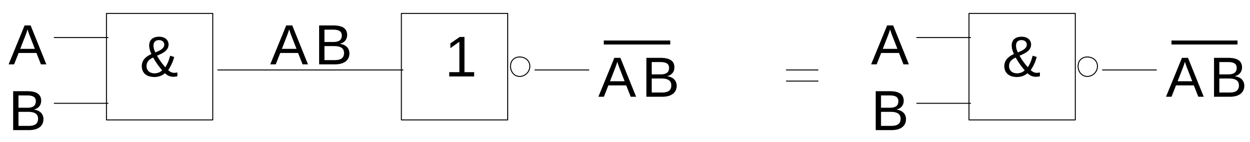




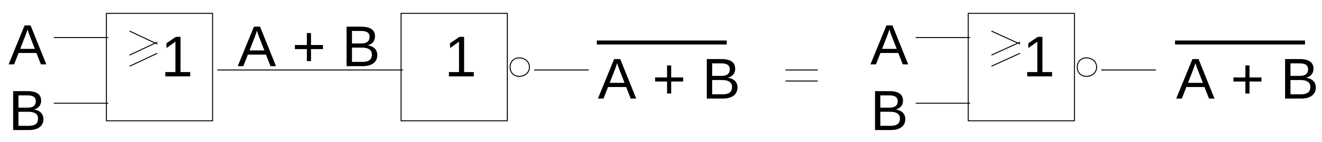
Aalto-yliopisto

JA-EI- (NAND) ja TAI-EI- (NOR)-portit

- Perusportteja yhdistelemällä saadaan seuraavat uudet porttipiirit:



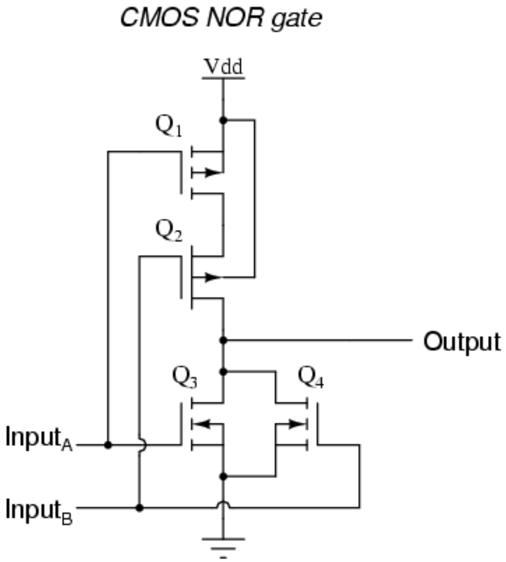
JA-EI-portti

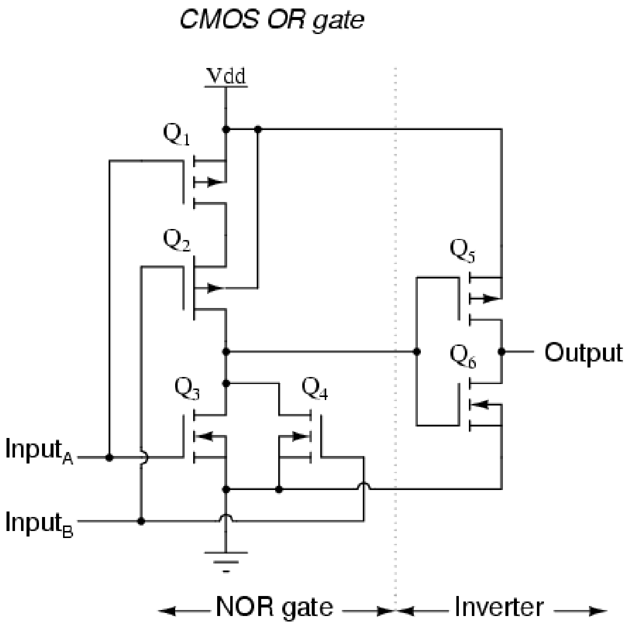


TAI-EI-portti

JA-EI- ja TAI-EI-portit, jatkoa

- CMOS logiikkatoteutuksissa JA-EI- ja TAI-EI-portit ovat sisäiseltä rakenteeltaan yksinkertaisempia kuin JA- ja TAI-portit
- CMOS-logikkka tuottaa aina invertoidun lähdön
  - NMOS vetää lähdön alas, kun tulo on ylhäällä.
  - PMOS vetää lähdön ylös, kun tulo on alhaalla.

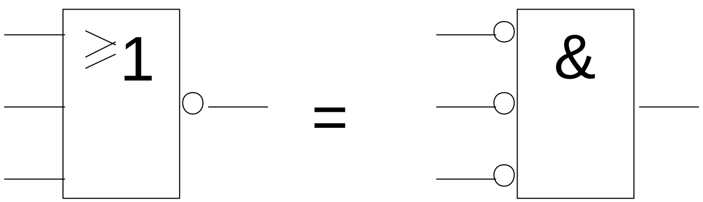




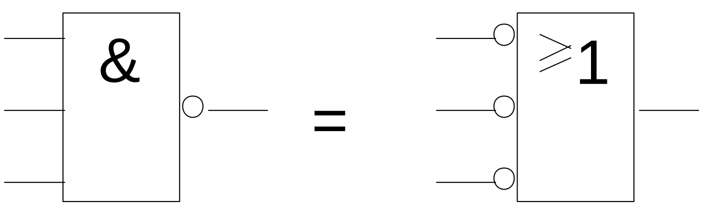
TAI-EI- ja JA-EI-porttien käyttöä

- De Morganin kaavat

$$\overline{A + B + C} \qquad \overline{A}\;\overline{B}\;\overline{C}$$



$$\overline{A\,B\,C} \qquad \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$



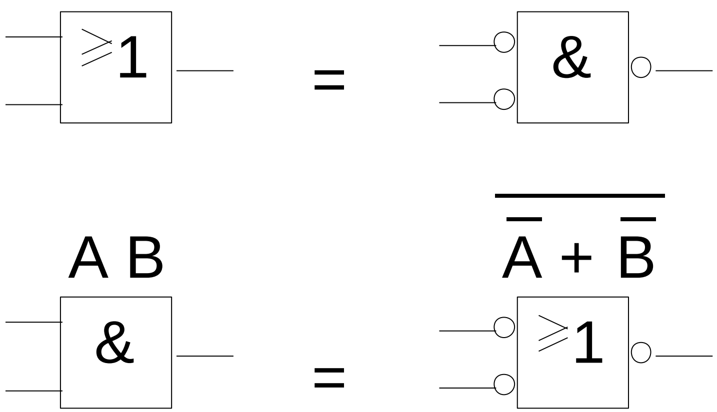
De Morgan

TAI-EI-porttien käyttö, jatkoa

- De Morganin kaavat

$$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

$$A\,B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$



De Morgan

EHDOTON TAI -portti (EXCLUSIVE OR)

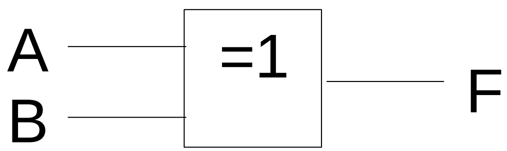
- Kaksiottoisen EHDOTON TAI -portin anto saa arvon 1 silloin ja vain silloin, kun täsmälleen yksi ottosignaaleista saa arvon 1
- Summaimen ydinoperaatio (yleinen logiikkaportti)

Looginen funktio ja merkintätapa:

$$F = \overline{A}\,B + A\,\overline{B}$$

$$F = A \oplus B$$

Piirrosmerkki:



Totuustaulu

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EHDOTON TAI -funktion ominaisuuksia

EHDOTON TAI=JOMPIKUMPI
Näin ajatellen alla esitetyt ominaisuudet ovat selviöitä.

$$A \oplus 0 = A \qquad A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$A \oplus A = 0 \qquad A \oplus \overline{A} = 1$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$A \oplus \overline{B} = \overline{A \oplus B} \qquad \overline{A} \oplus B = \overline{A \oplus B}$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$$

Tärkeimpiä peruslohkoja

Puolisummain

- Muodostaa kahden yksibittisen luvun summabitin ja muistibitin

- Luennon 6 esimerkki 2 komplementin laskusta 7+ (-4)

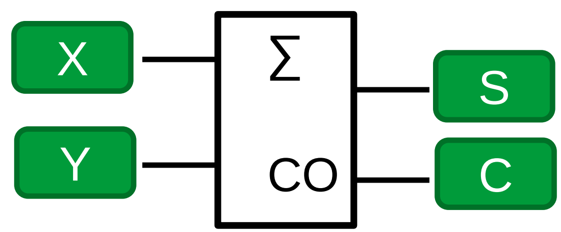
1	1			
	0	1	1	1
	1	1	0	0
	0	0	1	1

Puolisummain

- Muodostaa kahden yksibittisen luvun summabitin ja muistibitin

- Luennon 6 esimerkki 2 komplementin laskusta 7+ (-4)

1	1		C	
	0	1	1	X
	1	1	0	Y
	0	0	1	S



Puolisummain

- Muodostaa kahden yksibittisen luvun summabitin ja muistibitin

Totuustaulu

X	Y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Summabitti

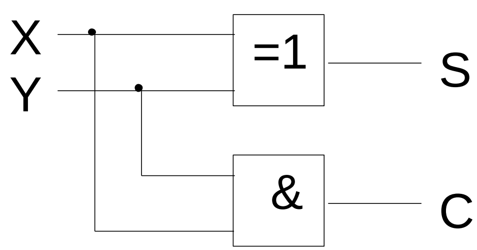
Muistibitti

Kytkentäfunktiot

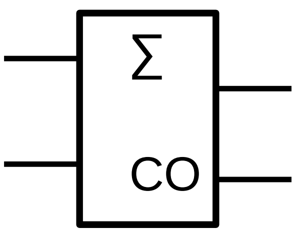
$$S = \bar{X}\,Y + X\,\bar{Y} = X \oplus Y$$

$$C = X\,Y$$

Piirikaavio



IEC-piirrosmerkki



Aalto-yliopisto

Kokosummain

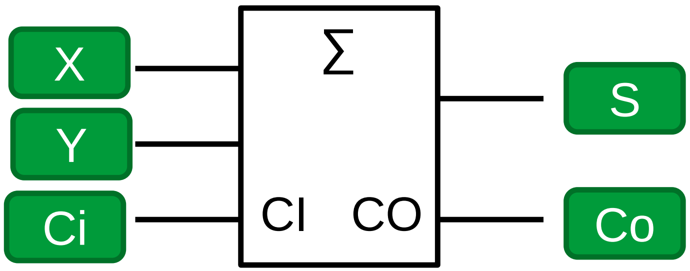
- Ottaa huomioon myös tulevan muistibitin

1	1			
	0	1	1	1
	1	1	0	0
	0	0	1	1

Kokosummain

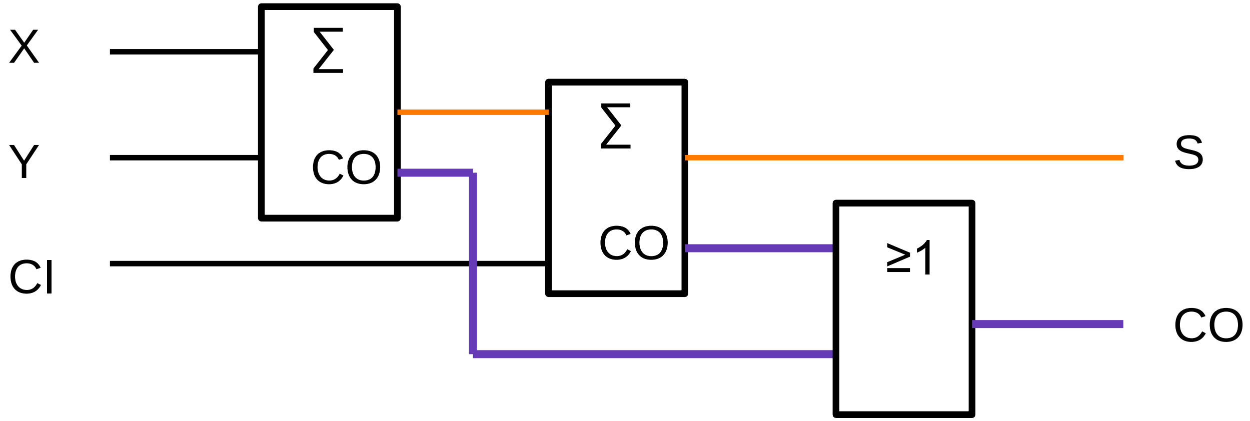
- Ottaa huomioon myös tulevan muistibitin

Co	Ci			
	X	1	1	1
	Y	1	0	0
	S	0	1	1

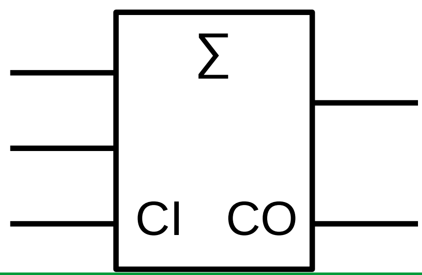


Kokosummain

- Ottaa huomioon myös tulevan muistibitin
- Voidaan rakentaa kahdesta puolisummaimesta:



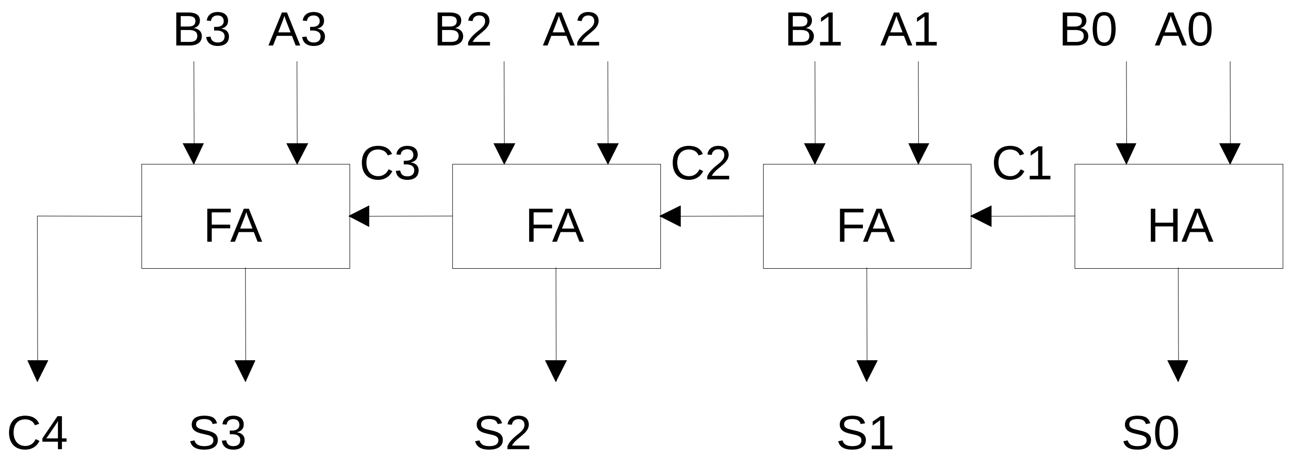
- IEC-piirrosmerkki:



Monibittiset binäärisummaimet

1 1 1

  10110
+00111
  11101

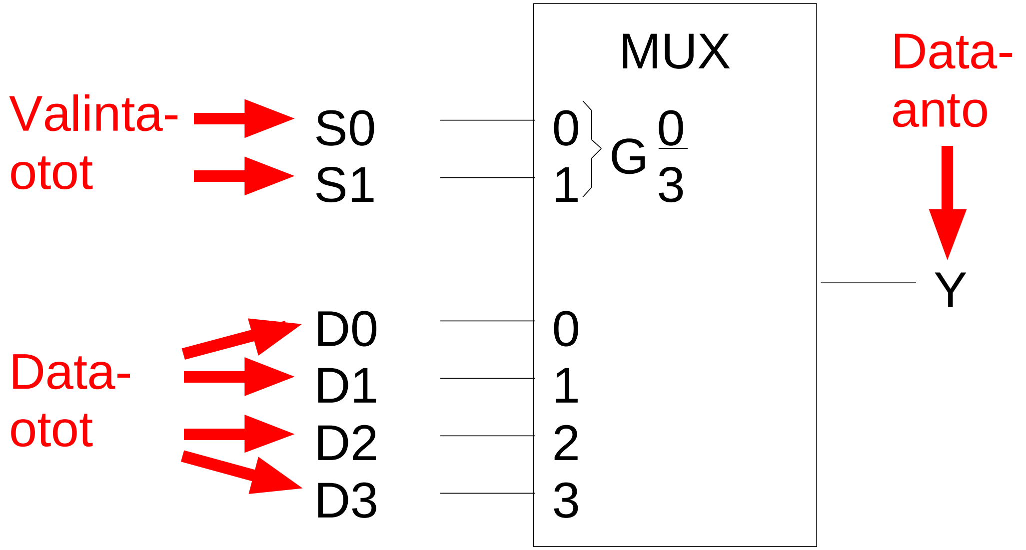


FA = full adder (kokosummain)

Multiplekseri eli ottovalitsin

- Antoon yhdistyy valinnan mukaan yksi useista otoista
- Esimerkki: 4 $\rightarrow$ 1-ottovalitsin

Piirrosmerkki



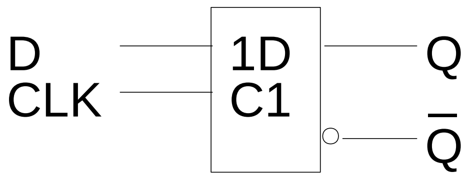
Toimintataulukko

S1	S0	Y
0	0	D0
0	1	D1
1	0	D2
1	1	D3

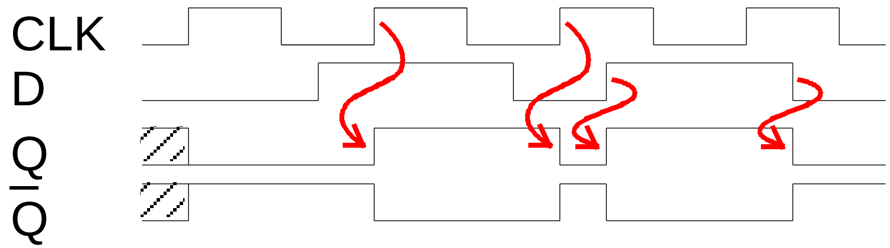
Kello-otolla varustettu D-salpa

- Kun kello = 1 ulos samaa mitä sisään
- Kun kello = 0 lähtö ei muutu

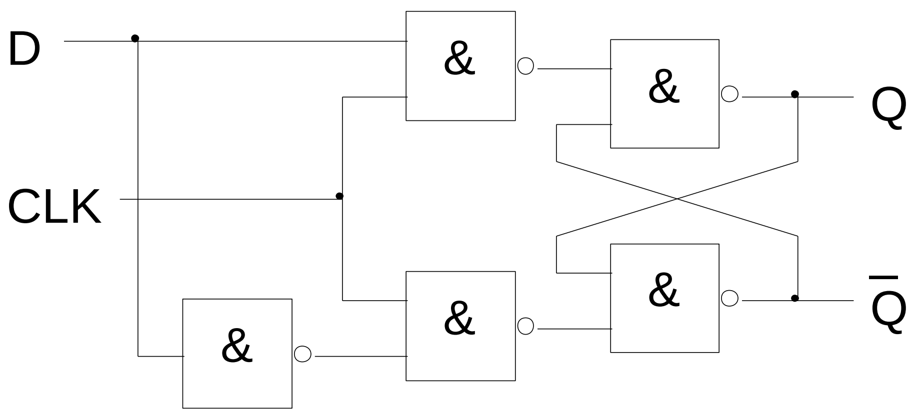
Piirrosmerkki



Aikakaavio



Piirikaavio



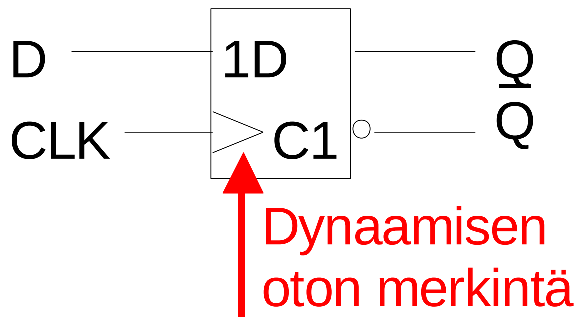
Toimintakaavio

CLK	D	Q	$\overline{Q}$	Tila
0	X	Q	$\overline{Q}$	Ei muutu
1	0	0	1	Nollattu
1	1	1	0	Asetettu

Nousevalla reunalla liipaistava D-kiikku

- liipaisu, kun kellosignaali muuttuu 0 $\rightarrow$ 1
- liipaisuhetkellä tutkitaan tulon arvo, lähtöön samaa arvoa seuraavaan liipaisuun asti

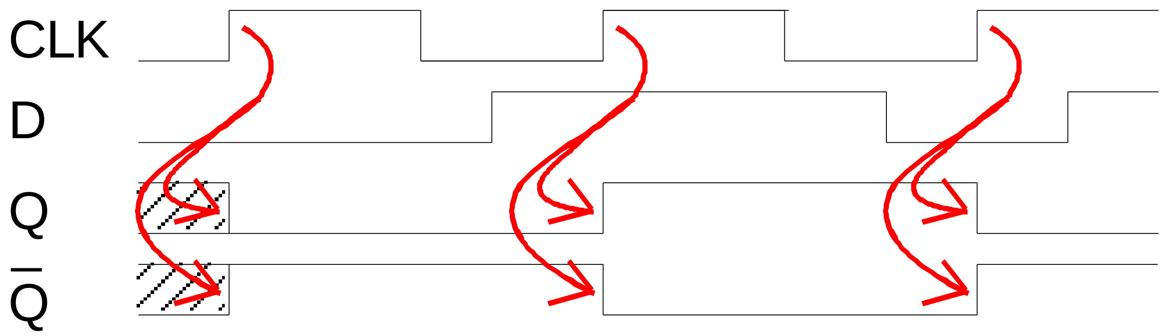
Piirrosmerkki



Toimintakaavio

D	Q(t+1)	Tila
0	0	Nollautuu
1	1	Asettuu

Aikakaavio



Luennon oppimistavoite

- Oppii käyttämään Karnaugh’n karttoja logiikan sieventämisessä (2h)
- Tuntee “johdannaisfunktiot” JA-EI (NAND) TAI-EI (NOR) ja EHDOTON TAI (EXCLUSIVE OR)
- Tuntee ottovalitsimen, D-salvan ja D-kiikun toiminnan.

Luento+laskari+itseopiskelu=2+2+2=6h