

- 1 Johdanto
- 2 Reaaliluvut
- 3 Jatkuvat funktiot $\mathbf{R}$:ssä
- 4 Sisätulo ja normi
- 5 Metrinen avaruus
- 6 Jatkuvuus
- 7 Jonot
- 8 Funktiojonot
- 9 Täydellisyys
- 10 Kompaktius
- 11 Yhtenäisyys
- 12 Tiivistelmä

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

III-periodi, kevät 2019

Pekka Alestalo

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Nämä kalvot sisältävät kurssin tärkeimpien käsitteiden määritelmät ja niihin liittyvät perustulokset. Todistuksia ja esimerkkejä käsitellään täydentävässä luentomonisteessa ja luennoilla.

Oheislukemiseksi ja itseopiskeluun sopii teos

Jussi Väisälä: Topologia I/Topologi I (Limes ry).

Tämä kirja sisältää kuitenkin enemmän asiaa kuin tällä kurssilla käsitellään.

Euklidinen avaruus: Tarkoittaa joukkoa $\mathbf{R}^n$ tavallisella etäisyyden käsitteellä varustettuna (tai myös n -vektorit ilman koordinaatiston valintaa).

Eukleides Aleksandrialainen n. 300 eaa. Kuuluisin teos *Alkeet*, jossa geometrian tuloksia johdetaan viidestä *aksiomasta* lähtien.

Metriinen avaruus on euklidisen avaruuden yleistys tilanteeseen, jossa etäisyyden (eli metriikan) käsite on yleisempi. Tällä kurssilla käsitellään (nimestä huolimatta) pääasiassa metrisiä avaruuksia.

Topologia on matematiikan ala, jossa tutkitaan vielä metrisiä avaruuksia yleisempiä tilanteita: lähtökohtana on *avoimen joukon* käsite.

- Metrinen avaruuden peruskäsitteiden ja tärkeimpien tulosten täsmällinen käsittely.
- Matemaattisen päättelyn (todistus) esittäminen ymmärrettävällä tavalla (koskee myös luennoitsijaa ...)
- Käsitteitä ja työkaluja jatkoa varten.
- **Huom:** Reaalilukuja koskevassa alkuosassa on paljon oheislukemista ja taustatietoa, eikä siihen käytettävä luento-aika vastaa sivumäärää.

Esimerkki

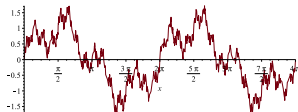
On olemassa jatkuvia funktioita $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, jotka eivät ole derivoituvia missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$.

Analyysin menetelmä: Kaavalla

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(4^n x)$$

määritelty funktio on tällainen, koska ...

Topologian menetelmä: *Melkein kaikki* funktiot ovat tällaisia, koska ...



Intuiitiivinen päättely johtaa joissakin tilanteissa harhaan. Ainoa tapa selvittää, mikä on totta ja mikä ei, on

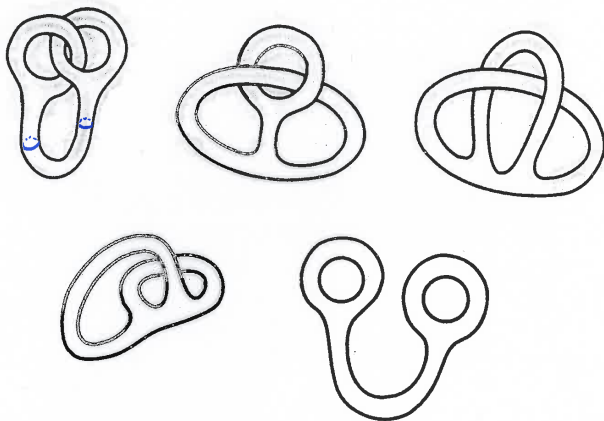
Määritelmät $\rightarrow$ *Lause* $\rightarrow$ *Todistus*

-tyyppinen päättely.

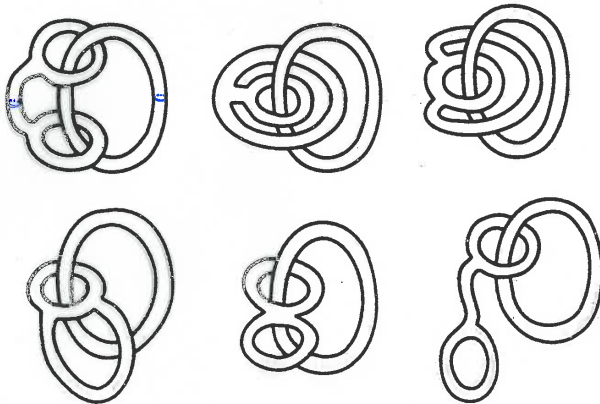
Esimerkkejä:

- Edellisen kalvon ei-missään-derivoituvat funktiot jms. (Weierstrass, Riemann, Cantor)
- Peanon käyrät (jatkuva käyrä kulkee tason jokaisen pisteen kautta)
- Jordanin käyrälauseen yleistykset
- Banachin ja Tarskin paradoksi (umpinainen pallo voidaan jakaa viiteen osaan, joista uudelleen koottuna saadaan kaksi alkuperäisen kanssa samankokoista palloa), Kakeyan ongelma, digitaalinen aurinkokello ja muut mittateorian erikoisuudet

Solmussa vai ei?



Linkissä vai ei?



Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Täsmällinen konstruointi palautuu rationaalilukuihin, jossa eri mahdollisuuksia:

- Dedekindin leikkaukset
- rationaaliset Cauchy-jonot
- desimaaliapproksimaatiot.

Reaalilukujen ja niiden laskutoimitusten konstruointi ei kuulu tälle kurssille, mutta viimeiseen kohtaan palataan lyhyesti myöhemmin.

Reaalilukujen **aksiomat**¹ (eli tavalliset laskusäännöt) oletetaan tunnetuiksi; poikkeuksena *Täydellisyysaksioma*, josta kohta lisää. Lisäksi Cauchy-jonoja käsitellään myöhemmin yleisemmässä tapauksessa metrisen avaruuden täydellisyyden kohdalla.

¹fi.wikipedia.org/wiki/Reaaliluku

Itseisarvo: Jos $x \in \mathbf{R}$, niin

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Ominaisuuksia:

Kaikille $x \in \mathbf{R}$ pätee

- $|x| = |-x| \geq 0$;
- $\pm x \leq |x|$;
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Lauseke $|x - y|$ on reaalikukujen x ja y välinen **etäisyys**.

- Määritelmästä seuraa reaalilukujen **kolmioepäyhtälö**

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

kaikille $x, y \in \mathbf{R}$. (Todistus seuraavalla sivulla)

- Yleisemmin

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

kaikille reaaliluvuille $x_1, \dots, x_n$.

- Yleistys sarjoille eli epäyhtälö

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

vaatii hieman tarkempaa tutkimista suppenemisen suhteen: vrt.
Diff-int-1-kalvot kohdassa *Itseinen suppeneminen*.

Kolmioepäyhtälön perustelu: Epäyhtälö $|x + y| \leq |x| + |y|$ seuraa arviosta

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Miinus-merkkinen versio saadaan korvaamalla $y \mapsto -y$:

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Lisäksi

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

joten $|x| - |y| \leq |x - y|$. Samalla tavalla $|y| - |x| \leq |x - y|$, joten ensimmäinen epäyhtälö seuraa. $\square$

- Lukujonolla tarkoitetaan ääretöntä jonoa reaalilukuja $a_n \in \mathbf{R}$, kun indeksi $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Merkitään

$$(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Myöhemmin kurssilla käsitellään yleisemmin metrisen avaruuden jonoja ja funktiojonoja.

- Lukujonon täsmällinen tulkinta on funktio $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, jolle $f(n) = a_n$.
- Jonon indeksointi voi alkaa myös jostakin muusta arvosta kuin 1. Jos indeksin alkuarvo ei ole tärkeä tai tilanne on muuten selvä, voidaan käyttää merkintää (a_n) .

Määritelmä 2.1

Lukujono (a_n) on

- **ylhäältä rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että $a_n \leq C$ kaikilla n
- **alhaalta rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $c \in \mathbf{R}$, että $a_n \geq c$ kaikilla n
- **rajoitettu**, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu
- **nouseva** (= kasvava), jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla n
- **laskeva**, (= vähenevä) jos $a_{n+1} \leq a_n$ kaikilla n
- **monotoninen**, jos se on nouseva tai laskeva

Käsitteet **aidosti** nouseva/laskeva/monotoninen saadaan korvaamalla $\leq$ ja $\geq$ symboleilla $<$ ja $>$.

Määritelmä 2.2

Lukujono (a_n) **suppenee** kohti raja-arvoa $L \in \mathbf{R}$, jos lausekkeen $|a_n - L|$ arvo lähestyy nollaa, kun $n \rightarrow \infty$; täsmällisemmin: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ aina, kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Tällöin merkitään

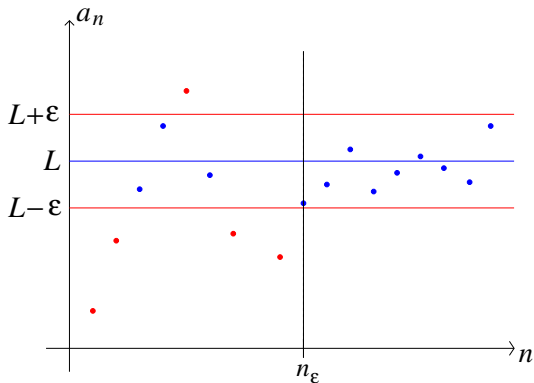
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ tai } \lim a_n = L \text{ tai lyhyesti } a_n \rightarrow L.$$

Jos lukujono ei suppenee, niin se **hajaantuu**.

Lyhyesti: $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

Jonon suppeneminen II

Idea: Mitä pienempi ε , sitä suurempi n_ε tarvitaan.



Huom: $|a_n - L|$ = jonon pisteen a_n ja raja-arvon L välinen etäisyys:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

- ① Suppeneva jono on rajoitettu.
- ② **Epäyhtälön säilyminen:** Jos $a_n \rightarrow L$ ja $a_n \leq C = \text{vakio}$ jostakin indeksistä alkaen, niin $L \leq C$.
Huom: Ehdosta $a_n < C$ seuraa yleensä vain $L \leq C$ eikä $L < C$.
- ③ **Suppiloperiaate:** Jos $a_n \leq b_n \leq c_n$ jostakin indeksistä alkaen ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L,$$

niin jono (b_n) suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

- ④ Geometrinen jono (q^n) suppenee, jos suhdeluku $-1 < q \leq 1$, jolloin sen raja-arvo on joko 0 tai 1. Muissa tapauksissa geometrinen jono hajaantuu.

Lause 2.3

Jos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ja $c \in \mathbf{R}$, niin

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c a$,
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$,
- ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a/b$, jos $b \neq 0$.

Huom: Viimeisen kohdan oletuksesta $b \neq 0$ seuraa, että $b_n \neq 0$ jostakin indeksistä alkaen.

Perustelu: Ensimmäinen kaava perustuu epäyhtälöön

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Toinen kaava seuraa yhtälöstä

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a|.$$

Kolmannen kaavan kohdalla käytetään epäyhtälöä

$$|a_nb_n - ab| = |(a_nb_n - a_nb) + (a_nb - ab)| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|$$

ja sitä, että $|a_n| \leq C$ jollakin vakiolla C .

Neljannen kaavan kohdalla osoitetaan aluksi, että $1/b_n \rightarrow 1/b$, ja käytetään sen jälkeen tulokaavaa.

Määritelmä 2.4

Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ ylhäältä rajoitettu. Reaaliluku $M \in \mathbf{R}$ on joukon A pienin yläraja eli *supremum*, jos

- (i) M on joukon A yläraja, eli $a \leq M$ kaikilla $a \in A$;
- (ii) $M \leq M'$ kaikille joukon A ylärajoille M' .

Tällöin merkitään $\sup A = M$.

- Jos A ei ole ylhäältä rajoitettu, niin merkitään $\sup A = \infty$.
- Vastaavalla tavalla määritellään suurin alaraja eli *infimum* $\inf A$.
- Rajoitetulle joukolle $A \neq \emptyset$ on siis $[\inf A, \sup A]$ pienin suljettu väli, joka sisältää joukon A .

Supremumin ja infimumin tärkein ominaisuus on se, että ne yleistävät maksimin ja minimin käsitteet kaikille joukoille.

- Jos on olemassa sellainen $a_1 \in A$, että $a \leq a_1$ kaikilla $a \in A$, niin a_1 on joukon A suurin alkio eli maksimi. Merkitään $\max A$.
- Jos on olemassa sellainen $a_2 \in A$, että $a \geq a_2$ kaikilla $a \in A$, niin a_2 on joukon A pienin alkio eli minimi.
Merkitään $\min A$.
- Monilla joukoilla ei ole suurinta tai pienintä alkioita; esimerkiksi avoimella välillä $]a, b[$.
- Jos $\sup A$ on äärellinen ja $\in A$, niin $\max A = \sup A$.
- Jos $\inf A$ on äärellinen ja $\in A$, niin $\min A = \inf A$.

Supremumin ja infimumin merkitys tulee näkyville sellaisissa tilanteissa, joissa maksimia ja minimiä ei ole olemassa. Esimerkkejä:

- Parametrisoidun käyrän kaarenpituus. (Kts. luentomoniste)
- Rajoitetun funktion Riemann-integraali. (Kts. luentomoniste)
- Joukon läpimitta, joukkojen välinen etäisyys (myöhemmin tällä kurssilla)

Lisäksi sup/inf-käsitteitä tarvitaan monien lauseiden todistuksissa, vaikka niiden muotoilussa sup/inf ei esiinny:

- Suljetulla välillä jatkuvalla funktiolla on maksimi ja minimi.
- Jos jatkuva funktio vaihtaa merkkiä välillä $[a, b]$, niin sillä on nollakohta tällä välillä.

Näihin tuloksiin palataan vähän myöhemmin.

Täydellisyysaksioma I

Reaalilukujen joukon erottaa rationaalilukujen joukosta $\mathbf{Q}$
Täydellisyysaksioma, eli jokin seuraavista keskenään yhtäpitävistä ominaisuuksista:

- (i) Jos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ on ylhäältä rajoitettu joukko, niin sillä on pienin yläraja $\sup A \in \mathbf{R}$.
- (ii) Nouseva ja ylhäältä rajoitettu reaalilukujono $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suppenee kohti jotakin raja-arvoa $L \in \mathbf{R}$.
- (iii) Jos $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on pienenevä jono (inkluusion suhteen, eli $I_{n+1} \subset I_n$ kaikilla n) suljettuja välejä $I_n \subset \mathbf{R}$, niin leikkaus

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Todistus (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) luentomonisteessa.

Huom: Kohta (iii) ei aina päde avoimien välien leikkaukselle.

Täydellisyysaksioma II

Yhtäpitäviä versioita:

- (i)' Jos $\emptyset \neq B \subset \mathbf{R}$ on alhaalta rajoitettu joukko, niin sillä on suurin alaraja $\inf B \in \mathbf{R}$.
- (ii)' Laskeva ja alhaalta rajoitettu reaalilukujono $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suppenee.

Perustelun idea: (i) $\Rightarrow$ (i)': Jos (i) on tosi ja B on alhaalta rajoitettu, niin sovelletaan ehtoa (i) ylhäältä rajoitettuun joukkoon

$$A = -B = \{-b \mid b \in B\}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (ii)': Jos (ii) on tosi ja (b_n) on laskeva ja alhaalta rajoitettu, niin sovelletaan ehtoa (ii) nousevaan ja ylhäältä rajoitettuun jonoon (a_n) , jonka termit ovat muotoa $a_n = -b_n$.

Vastakkaiset suunnat samalla periaatteella.

Kohdat (ii) ja (ii)' tarjoavat mahdollisuuden reaaliluvun täsmälliseen määritelmään:

Reaaliluku $n, d_1 d_2 \dots$, jossa kokonaisosa n on kokonaisluku ja desimaalit $d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, on monotonisen rationaalilukujonon

$$(n; n, d_1; n, d_1 d_2; n, d_1 d_2 d_3, \dots)$$

raja-arvo.

Reaalilukujen laskutoimitukset määritellään käyttämällä apuna approksimoivia rationaalilukujonoja ja raja-arvoja. Yksityiskohdat ovat periaatteessa suoraviivaisia, mutta melko pitkiä (ja tylsiä?).

Irrationaaliluvut

Suurin osa (kts. loppu) reaaliluvuista $x \in \mathbf{R}$ on irrationaalisia eli niitä ei voida esittää muodossa $x = p/q$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. Esimerkkejä:

- $\sqrt{2}$. Idea: Jos $\sqrt{2} = p/q$, niin p, q ovat parillisia $\Rightarrow$ RR.
(Antiikin kreikkalaiset; Hippasus?)
- Neperin luku e .
Idea: Taylor-polynomin virhearvio (L. Euler 1737).
- $\pi \approx 3,14\dots$ (M. Lambert 1761) Katso esim.
<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2001/2/lehtinen/>

Tämän kurssin kannalta tärkeimmät tulokset ovat:

- Kahden eri reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku (ja itse asiassa äärettömän monta)
- Kahden eri reaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku (ja itse asiassa äärettömän monta)

Todistukset luentomonisteessa.

Algebralliset luvut (oheislukemista)

Kaikki rationaaliluvut ovat myös *algebrallisia*: Rationaaliluku $x = p/q$ toteuttaa kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön $qx - p = 0$.

Vastaavasti irrationaaliluku $x = \sqrt{2}$ toteuttaa yhtälön $x^2 - 2 = 0$.

Sen sijaan e ja π eivät ole algebrallisia vaan *transkendenttisia* lukuja: ne eivät ole minkään kokonaislukukertoimisen polynomin nollakohtia!

- e : C. Hermite 1873,
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/3/hermite.pdf>
- π : F. von Lindemann 1882

Suurin osa reaaliluvuista on transkendenttisia, mutta yksittäisen luvun osoittaminen sellaiseksi on yleensä hyvin hankalaa. Esimerkkejä:

- e^π on transkendenttinen: A.O. Gelfond 1929
- $2^{\sqrt{2}}$ on transkendenttinen: T. Schneider 1932
- $e + \pi$, πe , π^π , e^e , ...: edes rationaalisuutta ei tiedetä!

Lause 2.5

Reaalilukujen joukko on ylinumeroituva (uncountable): Ei ole olemassa surjektiota $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$; ts. mikään reaalilukujono ei voi sisältää kaikkia reaalilukuja.

Todistus: Cantorin diagonaalimenetelmä, kts. luentomoniste. $\square$

Vastakohta on *numeroituva* (countable) joukko X , joka on äärellinen tai sen kaikki alkiot voidaan luetella jonon alkioina; ts. on olemassa surjektio $\mathbf{N} \rightarrow X \Leftrightarrow$ on olemassa injektio $X \rightarrow \mathbf{N}$. Esimerkiksi $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ jne.

Jonon (x_n) **osajono** (subsequence) saadaan poistamalla osa termeistä ja numeroimalla jäljelle jäävät uudelleen indekseillä $1, 2, 3, \dots$ niin, ettei termien keskinäinen järjestys muutu.

Tarkemmin:

Määritelmä 3.1

Jos $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ on aidosti kasvava, niin jono

$$(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$$

on jonon $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ osajono.

- Osajonolle käytetään usein myös merkintää (x_{n_k}) , jossa $n_k = \varphi(k)$ ja $k = 1, 2, 3, \dots$ on uusi indeksi.
- Aina pätee $\varphi(n) \geq n$, kuten helposti (tai induktiolla) nähdään.
- Suppenevan jonon kaikki osajonot suppenevat kohti alkuperäisen jonon raja-arvoa.

Esimerkki 3.2

Jono $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ ei suppene, mutta sillä on suppenevat osajonot

$$(x_{2n}) = (1, 1, 1, \dots) \text{ ja } (x_{2n-1}) = (-1, -1, -1, \dots).$$

Satunnaisesti valittu jono ei yleensä ole suppeneva, mutta seuraavan lauseen perusteella sillä on usein suppenevia osajonoja.

Lause 3.3

- (i) *Jokaisella jonolla on monotoninen osajono.*
- (ii) *Jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.*

Jälkimmäinen ominaisuus liittyy myöhemmin käsiteltävään **kompaktin** joukon määritelmään.

Jatkuvuus määritellään yleensä $\varepsilon - \delta$ -tyyppisen ehdon avulla (myöhemmin tällä kurssilla yleisessä tapauksessa), mutta seuraava jonoihin perustuva määritelmä on sen kanssa yhtäpitävä.

Määritelmä 3.4

Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ja $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä $a \in A$, jos pätee: Aina kun joukon A suppevan jonon (a_n) raja-arvo on a , niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a).$$

Jos f on jatkuva joukon A jokaisessa pisteessä, niin sanotaan: f on jatkuva joukossa A .

Tämä määritelmä on siinä mielessä kätevä, että jatkuvuuden ominaisuudet palautuvat suurelta osin jonojen tunnettuihin ominaisuuksiin; esim. summan $f + g$ jatkuvuus jms.

Jatkuvien funktioiden ominaisuudet

Suppenevien osajonojen avulla voidaan todistaa yhden reaalimuuttujan jatkuvien funktioiden perusominaisuudet.

Lause 3.5

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva funktio. Tällöin

- (i) funktio f on rajoitettu (ts. sen arvojoukko on rajoitettu);*
- (ii) funktiolla f on maksimi ja minimi välillä $[a, b]$ (ts. sen arvojoukolla on maksimi ja minimi).*
- (iii) Jos $f(a)f(b) < 0$, niin on olemassa sellainen piste $c \in]a, b[$, että $f(c) = 0$.*

Todistukset löytyvät luentomonisteesta; viimeisessä kohdassa ei tarvita osajonoja. Nämä tulokset ovat erikoistapauksia yleisemmistä metristen avaruuksien lauseista, joita käsitellään myöhemmin.

Vektoriavaruus (vector space)

Reaalinen vektoriavaruus on joukko E , jossa on määritelty

- kahden vektorin² summa: $u + v \in E$, kun $u, v \in E$, ja
- vektorin kertominen skalaarilla: $cv \in E$, kun $v \in E$ ja $c \in \mathbf{R}$

Lisäksi vaaditaan, että

- on olemassa nollavektori $\bar{0} \in E$, jolle $\bar{0} + v = v$ kaikille $v \in E$
- jokaisella $v \in E$ on vastavektori $-v \in E$, jolle $v + (-v) = \bar{0}$
- $1v = v$ kaikille $v \in E$.
- "kaikki tavalliset" laskusäännöt eli vaihdanta-, liitäntä- ja osittelulait ovat voimassa.

Aiheesta lisää kurssilla MS-C1340. Katso myös

https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space

²Joukon E alkioita kutsutaan tässä yhteydessä vektoreiksi

Vektoriavaruuden aksiomista (oheislukemista)

Aksiomaattisen lähestymistavan idea on minimalistinen: Valitaan mahdollisimman vähän sääntöjä, joilla tullaan toimeen. Vektoriavaruuden aksioissa ei esimerkiksi mainita sääntöjä $0v = \bar{0}$ tai $(-1)v = -v$, koska ne seuraavat muista aksioista. Esimerkiksi:

$0v = 0v + \bar{0}$	(nollavektorin ominaisuus)
$= 0v + (0v + (-(0v)))$	(vastavektorin ominaisuus)
$= (0v + 0v) + (-(0v))$	(liitântälaki)
$= (0 + 0)v + (-(0v))$	(osittelulaki)
$= 0v + (-(0v))$	(reaaliluvun 0 ominaisuus)
$= \bar{0}$	(vastavektorin ominaisuus)

Esimerkki 4.1

(i) Euklidinen avaruus

$$\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R} \text{ kaikilla } 1 \leq k \leq n\},$$

kun yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään koordinaateittain:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, \dots, cx_n), \quad c \in \mathbf{R},$$

kun $x, y \in \mathbf{R}^n$. Nollavektori on $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ ja vastavektori $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.

(ii) Sama yleistyy kaikkien reaalilukujonojen joukolle

$$s = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_k \in \mathbf{R} \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N}\}.$$

Esimerkkejä vektoriavaruuksista II

Monimutkaisempia esimerkkejä saadaan erilaisista funktioavaruuksista:

Esimerkki 4.2

Jos $A \subset \mathbf{R}$, niin

$$F(A, \mathbf{R}) = \{f \mid f \text{ on funktio } A \rightarrow \mathbf{R}\}$$

on vektoriavaruus, kun laskutoimitukset määritellään pisteittäin:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \quad x \in A, \quad c \in \mathbf{R},$$

vektoreille $f, g \in F(A, \mathbf{R})$. Näissä kaavoissa kerrotaan siis (luonnollisella tavalla), miten funktioiden $f + g$ ja cf arvot lasketaan. Nollavektorina toimii nollafunktio $\bar{0}$, jonka arvo kaikissa pisteissä on 0.

Kaikissa tapauksissa vektoriavaruuden aksiomien tarkistaminen on hyvin suoraviivaista.

Sisätuloavaruus (inner product space)

Määritelmä 4.3

Reaalisessa vektoriavaruudessa E määritelty operaatio $E \times E \rightarrow \mathbf{R}$, jossa $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = x \cdot y$, (vaihtoehtoiset merkinnät) on **sisätulo** (inner product), jos pätee

(S1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ kaikilla $x, y \in E$

(S2) $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$ kaikilla $x, y \in E$, $a \in \mathbf{R}$

(S3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ kaikilla $x, y, z \in E$

(S4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ kaikilla $x \in E$

(S5) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$

Sisätuloon liittyvä vektorin $x \in E$ **normi** on $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Näistä ehdoista seuraa, että ominaisuuksilla (S2) ja (S3) on samantapaiset versiot, jossa kerroin tai summa on sisätulon jälkimmäisessä vektorissa.

Muita sisätulon merkintöjä: $\langle x | y \rangle$, $(x | y)$ tai jopa (x, y) .

Schwarzin epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö

Lause 4.4

Sisätuloavaruudessa E pätee

- Schwarzin epäyhtälö: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
- Kolmioepäyhtälö: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

kaikille $x, y \in E$.

Lisäksi

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= (x - y) \cdot (x - y) = x \cdot x - x \cdot y - y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y,\end{aligned}$$

joten

$$x \cdot y = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \right).$$

Sisätulo voidaan siis laskea pelkästään vektoreiden pituuksien avulla.

Määritelmä 4.5

Kahden sisätuloavaruuden vektorin $x, y \in E \setminus \{\bar{0}\}$ välinen kulma $\varphi \in [0, \pi]$ on

$$\varphi = \arccos \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right).$$

Schwarzin epäyhtälön perusteella oikean puolen arccos-lauseke on määritelty.

Määritelmän idea: Vektorit $\bar{0}$, x , y määräävät tasokolmion, jonka sivujen pituudet ovat $\|x\|$, $\|y\|$ ja $\|x - y\|$; Kolmioepäyhtälö takaa, että tällainen tasokolmio on olemassa. Lisäksi $x \cdot y$ on sama kuin kolmion sivuvektoreille laskettu 2-ulotteinen pistetulo (vrt. edellinen kalvo), joten kaava vastaa täysin tasogeometrian tilannetta.

Kolme tärkeää esimerkkiä I

- Euklidinen avaruus $\mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_k \in \mathbf{R}$ kaikilla $k = 1, \dots, n$:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

- Jonoavaruus

$$\ell^2 = \{(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \mid x_k \in \mathbf{R} \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N} \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}:$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

- Jatkuvien funktioiden avaruus ($C = \text{continuous}$)

$$C([a, b]) = C([a, b], \mathbf{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}:$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Kolme tärkeää esimerkkiä II

Kaikkien ehtojen tarkistaminen on hyvin suoraviivaista, seuraavia poikkeuksia lukuun ottamatta.

- Jonoavaruuden kohdalla täytyy tarkistaa, että sarja $\sum_k x_k y_k$ suppenee aina, kun $x, y \in \ell^2$. Tämä seuraa avaruuden $\mathbf{R}^n$ Schwarzin epäyhtälöstä: Jos $x, y \in \ell^2$, niin

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| = \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| \|y\| < \infty,$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$, joten tutkittava sarja suppenee itseisesti ja siten myös tavallisessa mielessä.

- Funktioavaruuden kohdalla ominaisuuteen (S5) tarvitaan tietoa: Jos $h: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ on jatkuva funktio ja

$$\int_a^b h(x) dx = 0,$$

niin $h(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Kompleksinen sisätulo (oheislukemista)

Kompleksisessa vektoriavaruudessa E vektoreita $v \in E$ voidaan kertoa myös kompleksiluvuilla $c \in \mathbf{C}$.

- Kompleksisen sisätulon määritelmässä ehto (S1) muuttuu muotoon $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$. Muut ehdot säilyvät ennallaan.
- Muutoksen seurauksena (vai syynä?) yksinkertaisimmassa esimerkissä $\mathbf{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_k \in \mathbf{C} \text{ kaikilla } 1 \leq k \leq n\}$ kaavalla

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n} = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}$$

määritelty operaatio toteuttaa ehdot (S4) ja (S5).

- Tästä seuraa kuitenkin, että $\langle x, ay \rangle = \overline{a} \langle x, y \rangle$, kun $a \in \mathbf{C}$.

Kompleksisen sisätulon sovelluksia esiintyy mm. Fourier-analyysissä ja kvanttimekaniikassa.

Määritelmä 4.6

Vektoriavaruuden E kuvaus $E \rightarrow [0, \infty[$, jossa $x \mapsto \|x\|$, on **normi** (norm), jos

$$(N1) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ kaikilla } x, y \in E \text{ (kolmioepäyhtälö)}$$

$$(N2) \quad \|cx\| = |c| \|x\| \text{ kaikilla } x \in E, c \in \mathbf{R}$$

$$(N3) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$$

Tulkinta: $\|x\|$ = vektorin x pituus.

Tyypillinen esimerkki: Sisätulon määräämä normi.

- Kolmioepäyhtälöstä seuraa myös käänteinen epäyhtälö

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$$

kaikilla $x, y \in E$.

Esimerkki 4.7

Joukossa $\mathbf{R}^n$ voidaan määritellä myös normit

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k| \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Ominaisuuksien (N1)–(N3) todistukset ovat melko suoraviivaisia (luennot/harjoitukset).

Nämä yleistyvät myös tiettyjen jonoavaruuksien vastaaviksi normeiksi, kunhan huolehditaan siitä, että lausekkeet pysyvät äärellisinä ja jälkimmäisessä $\max \rightarrow \sup$.

Esimerkkejä normiavaruuksista II

Sekä 1-normi että ∞ -normi ovat erikoistapauksia yleisestä p -normista

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p},$$

kun $p \geq 1$. Tapauksessa $p = 2$ saadaan sisätulon määräämä Euklidinen normi $\|x\|_2$. Voidaan kuitenkin osoittaa, ettei muita p -normeja saada minkään sisätulon avulla.

Johtopäätös: Normiavaruus on (paljon) yleisempi käsite kuin sisätuloavaruus. Merkintöjä selittää kaava (harjoitukset)

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \text{ kaikille } x \in \mathbf{R}^n.$$

Huom: Kolmioepäyhtälön (N1) todistaminen p -normille on hankalaa, paitsi tapauksissa $p = 1$, $p = 2$ ja $p = \infty$.

Myös funktioavaruuksissa on erilaisia normeja:

Esimerkki 4.8

Jatkuvien funktioiden joukossa $C([a, b])$ voidaan käyttää myös normeja

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}.$$

Näitäkään ei saada minkään sisätulon avulla. Molemmissa kaavoissa funktion f jatkuvuus takaa sen, että lausekkeet ovat määriteltyjä ja äärellisiä.

Metrinen avaruus (metric space)

Määritelmä 5.1

Olkoon X joukko ja $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ funktio, joka toteuttaa ehdot

(M1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$

(M3) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, kun $x, y \in X$.

Tällöin d on **metriikka** (eli etäisyys, metric) joukossa X ja (X, d) on **metrinen avaruus**.

Tyypillinen esimerkki: Normin määräämä metriikka $d(x, y) = \|x - y\|$ normiavaruudessa E .

Huom: Sen sijaan yleisessä metrisessä avaruudessa lauseke $x - y$ ei ole edes määritelty, joten metriikkaa ei pidä kirjoittaa muodossa $\|x - y\|$.

Esimerkki 5.2

Avaruuden $\mathbf{R}^n$ erilaisia metriikoita saadaan p -normien avulla:

- $\|x - y\|_2$ = euklidinen metriikka (tavallinen etäisyys)
- $\|x - y\|_1$ = Manhattan-metriikka = "taxicab-metriikka"
- Hamming-etäisyys: kahden samanpituisten merkkijonon x ja y eroavien merkkien lukumäärä = $\|x - y\|_1$, jos kyseessä 0 – 1-jonot.

Muita esimerkkejä (sopivasti tulkittuina: miten?):

- "Veneilymetriikka": minimaalinen(?) kaarenpituus järveä pitkin.
- Kaupunkien välinen lyhin etäisyys/matka-aika maantietä/junanrataa pitkin.
- Graafien metriikat.

Metrisen avaruuden käsitteitä

Olkoon $a \in X$ keskipiste, $r > 0$ säde:

- avoin kuula $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ (open ball)
- suljettu kuula $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ (closed ball)
- pallo $S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$ (sphere)
- Joukon $A \subset X$ läpimitta (diameter)

$$d(A) = \text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

- Rajoitettu joukko (bounded set) $A \subset X \Leftrightarrow d(A) < \infty$.
- Joukkojen $A, B \subset X$ välinen etäisyys (distance)

$$d(A, B) = \text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Huom: Merkinnästä huolimatta $d(A, B)$ ei ole metriikka kaikkien osajoukkojen joukossa (vrt. Hausdorff-etäisyys).

Taustaoletus: (X, d) on metrinen avaruus.

Määritelmä 5.3

Joukko $U \subset X$ on **avoin** (open), jos jokaista $x \in U$ vastaa sellainen $r = r_x > 0$, että $B(x, r) \subset U$. Avaruuden X **topologia** (topology) on sen kaikkien avoimien osajoukkojen kokoelma, merkitään yleensä $\mathcal{T}$.

Jos $x \in U = \text{avoin}$, niin U on pisteen x (avoin) **ympäristö**.

Lause 5.4

- 1 Tyhjä joukko $\emptyset$, koko avaruus X ja kaikki avoimet kuulat $B(a, r)$ ovat avoimia.
- 2 Avoimien joukkojen yhdisteet ovat avoimia.
- 3 Avoimien joukkojen **äärelliset** leikkaukset ovat avoimia.

Suljetut joukot I

Määritelmä 5.5

Joukko $F \subset X$ on **suljettu** (closed), jos sen komplementti $X \setminus F$ on avoin.

Lause 5.6

- Tyhjä joukko $\emptyset$, koko avaruus X ja kaikki suljetut kuulat $\overline{B}(a, r)$ ovat suljettuja.
- Suljettujen joukkojen leikkaukset ovat suljettuja.
- Suljettujen joukkojen **äärelliset** yhdisteet ovat suljettuja.

Huom: Useimmat joukot eivät ole suljettuja eivätkä avoimia. Toisaalta eräät joukot (muutkin kuin $\emptyset$ ja koko X) voivat olla sekä avoimia että suljettuja. Tämä liittyy avaruuden yhtenäisyyteen, joka on kurssin viimeinen aihe.

Esimerkki 5.7

Olkoon $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tavallisella reaaliakselin metriikalla varustettuna. Tällöin osajoukko $A =]0, \infty[$ on sekä avoin että suljettu avaruudessa X .

Perustelu: Selvästi kaikki joukon A pisteet toteuttavat avoimen joukon ehdon, joten A on avoin. Yhtä selvästi sama pätee sen komplementille $B = X \setminus A =]-\infty, 0[$. Koska B on avoin, niin sen komplementti A on suljettu.

Esimerkki 5.8

Jokaisessa joukossa X voidaan määritellä *diskreetti metriikka* asettamalla

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Tällöin kaikki avaruuden X osajoukot ovat sekä avoimia että suljettuja!

Diskreetti metriikka on hyvä esimerkki siitä, kuinka kaukana yleinen metriikka voi olla tavallisesta etäisyyden käsitteestä ja avoimien tai suljettujen joukkojen intuitiivisista ominaisuuksista.

Määritelmä 5.9

Olkoon $A \subset X$. Avaruuden X pisteet voidaan jakaa kolmeen eri tyyppiin joukon A suhteen: Piste $x \in X$ on joukon A

- **sisäpiste** (interior point), jos $B(x, r) \subset A$ jollakin $r > 0$.
- **ulkopiste** (exterior point), jos $B(x, r) \subset X \setminus A$ jollakin $r > 0$.
- **reunapiste** (boundary point) muuten. Tällöin siis $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$.

Reunapisteiden joukko ∂A on joukon A **reuna** (boundary). Joukon A **sulkeuma** (closure) on $\bar{A} = A \cup \partial A$.

- Sulkeuma voidaan määritellä myös muilla yhtäpitävillä tavoilla; ks. esimerkiksi lauseen 5.10 neljäs kohta.
- Sisä-/ulkopisteiden joukoille käytetään merkintöjä $\text{int } A / \text{ext } A$.

Lause 5.10

Olkoon X metrinen avaruus ja $A, B \subset X$. Tällöin pätee:

- *Joukot $\text{int } A$ ja $\text{ext } A$ ovat avoimia.*
- *Reuna ∂A on suljettu.*
- *Joukko $\overline{A}$ on suljettu.*
- *Joukko $\overline{A}$ on (inklusion suhteen) pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A .*
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ja $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Todistukset: Luennolla/Väisälä 6.8.

Huom:

- Merkintä $\overline{B(x, r)}$ tarkoittaa avoimen kuulan $B(x, r)$ sulkeumaa, mutta se ei ole aina sama kuin suljettu kuula $\overline{B}(x, r)$. Aina pätee

$$\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r).$$

- Normiavaruudessa ($X =$ koko avaruus) nämä ovat aina samat ja lisäksi $\partial B(x, r) = \partial \overline{B}(x, r) = S(x, r)$.
- Esimerkki:

$$X = (\mathbf{R}^2 \setminus B(\overline{0}, 1)) \cup \{\overline{0}\},$$

jolloin $\overline{B(x, 1)}$ sisältää vain origon, mutta joukkoon $\overline{B}(x, 1)$ kuuluu myös yksikköympyrän kehä.

Lause 5.11

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä metrisen avaruuden osajoukolle $A \subset X$:

- 1 *Joukko A on suljettu.*
- 2 *Joukko $X \setminus A$ on avoin.*
- 3 *$\overline{A} = A$.*
- 4 *$\partial A \subset A$.*
- 5 *Jokaisen joukon A alkioista muodostetun suppenevan jonon raja-arvo kuuluu joukkoon A . (Tähän palataan myöhemmin jonojen yhteydessä.)*

Aliavaruus I

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\emptyset \neq A \subset X$. Joukossa A voidaan määritellä metriikka $d_A: A \times A \rightarrow [0, \infty[$ asettamalla

$$d_A(a, b) = d(a, b), \quad \text{kun } a, b \in A.$$

Tällöin (A, d_A) on metrisen avaruuden (X, d) **aliavaruus** (subspace). Yleensä merkitään $d_A = d$, ellei nimenomaan verrata aliavaruuden ominaisuuksia koko avaruuteen X .

Aliavaruuden kuulille käytetään merkintöjä

$$B_A(a, r) = \{b \in A \mid d_A(b, a) < r\},$$

$$\overline{B}_A(a, r) = \{b \in A \mid d_A(b, a) \leq r\},$$

kun $a \in A$ ja $r > 0$.

On helppo tarkistaa, että

$$B_A(a, r) = A \cap B_X(a, r)$$

kaikille $a \in A$ ja $r > 0$. Tästä seuraa:

Lause 5.12

Aliavaruuden $A \subset X$ avoimet joukot $U \subset A$ ja suljetut joukot $F \subset A$ ovat muotoa

$$U = A \cap V, \quad F = A \cap G,$$

jossa $V \subset X$ on avoin ja $G \subset X$ suljettu.

Esimerkki 5.13

Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ = suljettu yksikkökierros, jossa on tason $X = \mathbf{R}^2$ euklidinen metriikka. Tällöin joukko

$U = \{(x, y) \in X \mid y > 0\}$ on avoin; leikkaava tason $\mathbf{R}^2$ avoin joukko on esimerkiksi $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$. Yksikköympyrän yläosan pisteet $(x, y) \in A$, $x^2 + y^2 = 1$ ja $y > 0$, kuuluvat joukkoon U , mutta ne eivät ole joukon U reunapisteitä aliavaruudessa A . Itse asiassa $\partial_A U$ on pisteet $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$ yhdistävä jana (päätepisteinen).

Merkintä $\partial_A U$ tarkoittaa joukon U reunaa aliavaruudessa A , joka on tässä esimerkissä eri kuin $\partial_X U$ = puoliympyrän koko reunakäyrä.

Vastaavasti joukko $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0\}$ on suljettu aliavaruudessa $A' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Arvojoukko ja alkukuva I

Olkoot X ja Y joukkoja ja $f: X \rightarrow Y$ funktio. Tällöin X on funktion f **määrittelyjoukko** ja Y on sen **maalijoukko**.

- Joukko

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

on funktion f **arvojoukko** (tai **kuvajoukko**).

- Vastaavalla tavalla määritellään $f[A]$ osajoukoille $A \subset X$.
- Joukon $B \subset Y$ **alkukuva** on

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X.$$

Tässä f^{-1} on symbolinen merkintä, eikä tarkoita käänteisfunktioita.

- Arvojoukko ja alkukuva kirjoitetaan usein (yleensä?) ilman hakasulkuja.

- Funktio f on **surjektio**, jos $f[X] = Y$.
- Funktio f on **injektio**, jos kaikille pisteille pätee

$$x_1, x_2 \in X \text{ ja } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Funktio f on **bijektio**, jos se on injektio ja surjektio. Tällöin on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1}: Y \rightarrow X$, joka määräytyy ehdosta

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

kun $x \in X$ ja $y \in Y$.

- **Jos** käänteisfunktio $f^{-1}: Y \rightarrow X$ on olemassa, niin

$$f^{-1}[B] = \{f^{-1}(b) \mid b \in B\}.$$

Seuraavassa (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia.

Määritelmä 6.1

Funktio $f: X \rightarrow Y$ on **jatkuva** (continuous) pisteessä $a \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \text{ aina, kun } d(x, a) < \delta. \quad (1)$$

Funktio f on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in X$.

Huom: Ehto (1) voidaan muotoilla seuraavilla vaihtoehtoisilla tavoilla:

- $x \in X$ ja $d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$
- $f[B(a, \delta)] \subset B(f(a), \varepsilon)$
- $B(a, \delta) \subset f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$

Lause 6.2

Olkoon $f: X \rightarrow Y$ kuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) f on jatkuva.*
- (ii) Jokaisen avoimen joukon $V \subset Y$ alkukuva $f^{-1}[V] \subset X$ on avoin.*
- (iii) Jokaisen suljetun joukon $F \subset Y$ alkukuva $f^{-1}[F] \subset X$ on suljettu.*

Huom: Sen sijaan avoimen joukon $U \subset X$ kuvajoukko $f[U] \subset Y$ ei aina ole avoin, eikä suljetun joukon $G \subset X$ kuvajoukko $f[G] \subset Y$ aina suljettu, vaikka f on jatkuva.

Esimerkiksi vakiofunktio kuvaa kaikki osajoukot yhden pisteen joukolle, joka on suljettu (kaikissa metrisissä avaruuksissa).

Toisaalta jatkuvan funktion $f:]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x) = (x, x)$, arvojoukko ei ole suljettu, vaikka sen määrittelyjoukko on suljettu, koska se on koko avaruus $X =]0, 1]$.

Lause 6.3

Olkoot $f: X \rightarrow Y$ ja $g: Y \rightarrow Z$ jatkuvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f: X \rightarrow Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, kun $x \in X$, on jatkuva.

Lauseen todistus on hyvä esimerkki siitä, kuinka edellisen sivun ominaisuuksia käyttämällä päästään helpommalla kuin $\varepsilon - \delta$ -todistuksessa: Olkoon $V \subset Z$ avoin. Koska g on jatkuva, niin $g^{-1}[V] \subset Y$ on avoin. Koska f on jatkuva, niin $f^{-1}[g^{-1}[V]] \subset X$ on avoin. Yhdistetyn funktion jatkuvuus seuraa nyt joukko-opillisesta kaavasta

$$(g \circ f)^{-1}[V] = f^{-1}[g^{-1}[V]].$$

(Perustelu: $x \in (g \circ f)^{-1}[V] \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in V \Leftrightarrow g(f(x)) \in V$
 $\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}[V] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[g^{-1}[V]].$)

Yleisessä topologiassa tutkitaan joukkoja X , joissa ei (välttämättä) ole määritelty metriikkaa. Tällöin joukon X **topologia** $\mathcal{T}$ on mikä tahansa kokoelma X :n osajoukkoja, joka toteuttaa Lauseen 5.4 avoimuutta koskevat ehdot (ilman kohdan 1 kuulia $B(a, r)$ koskevaa vaatimusta, koska kuulan määritelmä perustuu metriikkaan). Sanotaan: $(X, \mathcal{T})$ on **topologinen avaruus**.

Kokoelmaan $\mathcal{T}$ sisältyviä joukkoja kutsutaan **avoimiksi** joukoiksi, ja joukko on **suljettu**, jos sen komplementti on avoin. Kuvausten **jatkuvuus** määritellään vaatimalla Lauseen 6.2 kohta (ii).

Topologinen avaruus on metristä avaruutta yleisempi käsite. Esimerkiksi $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ on topologia missä tahansa joukossa X , mutta sen avoimet joukot määräytyvät metriikan avulla vain silloin, kun joukossa X on yksi ainoa piste. Syy: Metrinen avaruuden eri pisteillä on erilliset (avoimet) ympäristöt, mutta tässä X on ainoa mahdollinen ympäristö.

Määritelmä 6.4

Bijektio $f: X \rightarrow Y$ on **homeomorfismi** (homeomorphism), jos sekä $f: X \rightarrow Y$ että $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ovat jatkuvia. Jos on olemassa homeomorfismi $f: X \rightarrow Y$, niin avaruudet X ja Y ovat **homeomorfiset** (homeomorphic), merkitään $X \approx Y$.

- Huomaa, että käänteisfunktion jatkuvuus täytyy vaatia erikseen, sillä se ei seuraa muista oletuksista (paitsi eräissä tärkeissä erikoistapauksissa).

Esimerkki 6.5

Yksikköympyrän parametrisoiva funktio $f: [0, 2\pi[\rightarrow S(0, 1) \subset \mathbf{R}^2$, $f(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$, on jatkuva bijektio, mutta sen käänteisfunktio on epäjatkuva pisteessä $(1, 0)$.

Homeomorfismi II

- Avaruuksien homeomorfisuus on **ekvivalenssirelaatio**, ts:
 - 1 $X \approx X$
 - 2 $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$
 - 3 $X \approx Y$ ja $Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$
- Topologisessa mielessä homeomorfisia avaruuksia voidaan pitää samoina. Metrinen avaruuden tapauksessa on luonnollisempaa vaatia myös kvantitatiivisia metriikkaan liittyviä ehtoja, kuten määritelmässä 6.6.
- Eräs topologian keskeisistä ongelmista on selvittää, mitkä avaruudet ovat keskenään homeomorfisia. Tämä koskee erityisesti *monistoja*, joiden määritelmä alla.

Homeomorfismi III

Eräitä käsitteitä (jotka esitetään tässä metrisinä avaruuksina, mutta yleisemmät määritelmät ovat yhtäpitäviä):

- Metrinen avaruus X on **kaari** (arc), jos $X \approx [0, 1]$.
- Metrinen avaruus S on **Jordan-käyrä** (Jordan curve), jos se on homeomorfinen tason yksikköympyrän (kehän) kanssa.
- Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Metrinen avaruus M on **n -monisto**, jos
 - (i) jokaisella pisteellä $x \in M$ on (avoin) ympäristö $U \approx B(\bar{0}, 1) \subset \mathbf{R}^n$.
 - (ii) On olemassa numeroituva osajoukko $N \subset M$, jolle $\bar{N} = M$.

Luku n on moniston **dimensio**. Määritelmän ensimmäinen ehto takaa sen, että n -monisto näyttää paikallisesti samantapaiselta kuin $\mathbf{R}^n$. Jälkimmäinen ehto on tekninen lisävaatimus, joka estää "kummalliset erikoistapaukset".

Voidaan osoittaa, että yhtenäiset³ 1-monistot ovat joko Jordan-käyriä tai $\approx \mathbf{R}$, mutta tilanne muuttuu mielenkiintoisemmaksi, kun $n \geq 2$.

³Määritelmä 11.1

Määritelmä 6.6

Kuvaus $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ on

- **isometria** (isometry), jos $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$
- **L -Lipschitz-jatkuva**, jos $d'(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$
- **(L, α) -Hölder-jatkuva**, jos $d'(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)^\alpha$

kaikilla $x, y \in X$. Tässä $L \geq 0$ ja $\alpha > 0$ ovat vakioita.

- Isometria on aina jatkuva injektio; se on myös homeomorfismi $X \rightarrow f[X]$.
- Muistakin ominaisuuksista seuraa funktion jatkuvuus.
- Lipschitz-jatkuvuus liittyy läheisesti derivoituvuuteen mm. väliarvolauseen kautta. Hölder-jatkuvat funktiot ovat tärkeitä mm. ODY:iden säännöllisyysteoriassa ja fraktaalien parametrisoinneissa.

Tuloavaruus I

Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) metrisiä avaruuksia. Niiden **tuloavaruus** (product space) on joukko $Z = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ varustettuna "jollakin järkevällä" metriikalla, esim.

$$\begin{aligned}d((x, y), (u, v)) &= d_1(x, u) \vee d_2(y, v) = \max(d_1(x, u), d_2(y, v)), \\e((x, y), (u, v)) &= d_1(x, u) + d_2(y, v).\end{aligned}$$

- Yleisemmässä tilanteessa tuloavaruus voi koostua useammasta kuin kahdesta osasta, esim. Euklidinen avaruus $\mathbf{R}^n$.
- Tekijöitä voi olla jopa äärettömän monta, mutta metriikan valinnassa täytyy silloin tarkistaa, että siitä tulee äärellinen. Esimerkiksi joukossa $[0, 1]^{\mathbf{N}}$ voidaan käyttää metriikkaa

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

- Tuloavaruuden **projektiot** määritellään kaavoilla

$$\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X, \text{pr}_1(x, y) = x,$$

$$\text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y, \text{pr}_2(x, y) = y.$$

- Projektiot ovat jatkuvia, jos tuloavaruuden metriikka liittyy "järkevällä" tavalla alkuperäisiin metriikoihin kuten d ja e . Syy: Projektiot ovat 1-Lipschitz-jatkuvia näiden metriikkojen suhteen.
- Funktion $f: Z \rightarrow X \times Y$ koordinaattifunktiot ovat $f_1 = \text{pr}_1 \circ f$ ja $f_2 = \text{pr}_2 \circ f$.
- Yhdistettyjen funktioiden jatkuvuutta koskevasta lauseesta seuraa: Funktio $f: Z \rightarrow X \times Y$ on jatkuva $\Leftrightarrow$ molemmat (yleisemmin: kaikki) koordinaattifunktiot ovat jatkuvia.

Metrisen avaruuden jonot

Jonon käsite liittyy keskeisesti kurssin loppuosan kahteen tärkeään käsitteeseen: täydellisyyteen ja kompaktiuteen.

Määritelmä 7.1

- Metrisen avaruuden (X, d) **jono** on funktio $x: \mathbf{N} \rightarrow X$. Yleensä merkitään $x(n) = x_n$, kun $n \in \mathbf{N}$, ja

$$x = (x_n) = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (x_1, x_2, \dots).$$

- Jono (x_n) **suppenee** (converges) kohti **raja-arvoa** (limit) $a \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että

$$d(x_n, a) < \varepsilon \quad \text{aina, kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ tai $x_n \rightarrow a$.

Lyhyesti: $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Lause 7.2

- Suppeneva jono (x_n) on **rajoitettu**, ts. on olemassa sellaiset $b \in X$ ja $r > 0$, että $x_n \in B(b, r)$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.
- Olkoon $A \subset X$ ja $a \in X$. Tällöin

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \text{ joukon } A \text{ jono } (a_n), \text{ jolle } a_n \rightarrow a.$$

- Seuraus: Joukko $A \subset X$ on suljettu $\Leftrightarrow A$ sisältää kaikkien X :ssä suppenevien jonojensa raja-arvot.

Huom: Metrisen avaruuden jonoilla ei ole reaalityyppisten jonojen tapaisia laskusääntöjä 2.3, paitsi silloin, kun tarvittavat laskutoimitukset on määritelty. Esimerkiksi normiavaruuden tapauksessa summaa ja vakiolla kertomista koskevat laskusäännöt ovat voimassa.

Lause 7.3

Olkoon $f: X \rightarrow Y$ ja $a \in X$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- ① Funktio f on jatkuva pisteessä a .*
- ② Aina kun avaruuden X jono (x_n) suppenee kohti pistettä a , niin jono $(f(x_n))$ suppenee kohti pistettä $f(a) \in Y$.*

Jatkuvuus tarkoittaa siis kaavaa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

suppeneville jonoille (x_n) .

Olkoon $Z = X \times Y$ metristen avaruuksien X ja Y tuloavaruus. Jos (z_n) on avaruuden Z jono, niin $z_n = (x_n, y_n)$, joten sitä vastaa 1-käsitteisellä tavalla avaruuksien X ja Y jonot (x_n) ja (y_n) .

Lause 7.4

Jono (z_n) suppenee $\Leftrightarrow$ jonot (x_n) ja (y_n) suppenevat. Tällöin pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

Oletuksena on jälleen se, että tuloavaruuden metriikka liittyy "järkevällä" tavalla avaruuksien X ja Y metriikoihin.

Vastaava tulos on voimassa myös silloin, kun tulon tekijöitä on enemmän kuin kaksi.

Jatkuvien funktioiden laskutoimitukset

Lauseiden 7.3 ja 7.4 avulla usean reaaliuuttujan funktioille saadaan seuraava tulos.

Lause 7.5

Olkon $A \subset \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ ja $f, g: A \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuvia funktioita pisteessä $a \in A$. Tällöin funktiot $f + g$, cf , fg ja f/g ovat jatkuvia pisteessä a ; viimeinen ehdolla $g(a) \neq 0$.

Todistus: Kaikki kohdat palautuvat reaaliarvoisten funktioiden laskusääntöihin 2.3. $\square$

Kahden reaaliarvoisen funktion summa, tulo ja osamäärä määritellään kaavoilla $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ja $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $x \in A$, jos viimeisessä $g(x) \neq 0$.

Funktioiden summa voidaan määritellä myös silloin, kun niiden maalijoukkona on vektoriavaruus.

Seuraavaan tiivistelmään on koottu funktiojonoihin liittyviä tuloksia. Derivaattaan ja integraaliin liittyvät kohdat ovat lähinnä oheislukemista, mutta ne on kerätty tähän jatkoksi, koska niitä ei käsitellä muilla peruskursseilla.

Funktiojonon suppeneminen

Olkoon X ja Y joukkoja. Jos jokaisella $n \in \mathbf{N}$ on määritelty funktio $f_n: X \rightarrow Y$, niin jonoa (f_n) kutsutaan **funktiojonoksi**.

Määritelmä 8.1

Olkoon X joukko ja $f_n: X \rightarrow (Y, d')$, kun $n \in \mathbf{N}$. Funktiojono (f_n) suppenee

(i) **pisteittäin** (pointwise) kohti funktiota $f: X \rightarrow Y$, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in X.$$

(ii) **tasaisesti** (uniformly) joukossa X kohti funktiota $f: X \rightarrow Y$, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{d'(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\}) = 0.$$

Jälkimmäisessä sallitaan $\sup = \infty$, jos näin käy vain äärellisen monella indeksillä n .

Lause 8.2

Jos jono (f_n) suppenee tasaisesti, niin se suppenee myös pisteittäin kohti samaa funktiota f .

Todistus: Yksittäisessä pisteessä $x_0 \in X$ pätee

$$d'(f_n(x_0), f(x_0)) \leq \sup\{d'(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\}. \quad \square$$

- Pisteittäisen suppenemisen kohdalla tutkitaan vain yhtä muuttujan arvoa $x \in X$ kerrallaan. Tasainen suppeneminen ottaa huomioon sen, kuinka paljon f_n poikkeaa rajafunktiosta f koko joukossa X .
- Funktioiden määrittelyjoukon X ei välttämättä tarvitse olla metrinen avaruus, vaikka näin yleensä on.

- Käytännössä: Annetusta funktiojonosta pyritään ensin selvittämään pisteittäinen rajafunktio f . Sen jälkeen voidaan tutkia, onko suppeneminen tasaista, kuten seuraavissa esimerkeissä.
- Tämän kurssin esimerkeissä ja tehtävissä tarkastellaan vain reaaliarvoisia funktiojonoja; rajafunktion arvo ei voi olla ∞ missään pisteessä.
- Reaaliarvoisille funktioille tasaisen suppenemisen ehto tulee muotoon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X\}) = 0.$$

Esimerkki 8.3

Olkoon $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$, kun $x \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

Esimerkki 8.4

Olkoon $f_n: [0, 1/2] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$, kun $x \in [0, 1/2]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

Esimerkki 8.5

Olkoon $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2 - nx, & 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$

Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

Ratkaisut: Luennolla/monisteessa.

Tasaisen suppenemisen ominaisuuksia

Lause 8.6

Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita $f_n: (X, d) \rightarrow (Y, d')$, joka suppenee tasaisesti joukossa X kohti funktiota $f: X \rightarrow Y$. Tällöin funktio f on jatkuva.

Lause 8.7

Olkoon (f_n) jono Riemann-integroituvia funktioita $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, joka suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ kohti Riemann-integroituvaa funktiota $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Huom: Rajafunktion f integroituvuus seuraa automaattisesti, jos funktiot f_n ovat jatkuvia (edellinen lause) tai kasvavia (tai väheneviä).

Rajafunktion derivaatta

Derivoimisen suhteen tilanne on hieman hankalampi.

Lause 8.8

Olkoon (f_n) jono jatkuvasti derivoituvia funktioita $f_n:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, jolle jono (f'_n) suppenee tasaisesti välillä $]a, b[$ kohti funktiota $g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$.

Oletetaan lisäksi, että jono $(f_n(x_0))$ suppenee ainakin yhdessä pisteessä $x_0 \in]a, b[$. Tällöin jono (f_n) suppenee tasaisesti välillä $]a, b[$ kohti jatkuvasti derivoituvaa funktiota $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, jolle pätee

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{kaikilla } x \in]a, b[.$$

Perustelu: Tämä seuraa integraalia koskevasta lauseesta, koska

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Funktiosarjat

Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ väli ja $g_k: I \rightarrow \mathbf{R}$ funktioita, $k \in \mathbf{N}$. Muodostetaan funktiojonon (g_k) osasummista jono (f_n) asettamalla

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x), \quad \text{kun } x \in I, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Funktiosarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

pisteittäinen ja tasainen suppeneminen määritellään tässä tapauksessa jonon (f_n) avulla. Jos sarja suppenee pisteittäin välillä I , niin saadaan sarjan summafunktio $f: I \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \quad \text{kun } x \in I.$$

Summafunktion jatkuvuus I

Seuraavassa tuloksessa viitataan edellisen sivun merkintöihin.

Lause 8.9

(Weierstrassin *M*-testi) Oletetaan, että jokaisella $k \in \mathbf{N}$ on olemassa sellainen $M_k \geq 0$, että $|g_k(x)| \leq M_k$ kaikilla $x \in I$. Jos funktiot g_k ovat jatkuvia välillä I ja sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

suppenee, niin osasummien jono (f_n) suppenee tasaisesti välillä I ja summafunktio $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva.

Myös funktiosarjan derivoimiselle ja integroimiselle termeittäin saadaan vastineet aikaisempien tulosten avulla.

Esimerkki 8.10

Fourier-sarjan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sin(4^k x)$$

summafunktio $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva.

Perustelu: Koska $|\sin(4^k x)| \leq 1$ kaikilla $k \in \mathbf{N}_0$ ja $x \in \mathbf{R}$, niin voidaan valita $M_k = 2^{-k}$ Weierstrassin testissä. $\square$

Sen sijaan termeittäin derivoitu sarja $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cos(4^k x)$ ei suppene (ilmeisesti missään pisteessä). Tulos *viittaa* siihen, ettei summafunktio f ole derivoituva missään pisteessä, ja tämä voidaan todistaa myös täsmällisesti.

Raja-arvon määritelmä on siinä mielessä hankala, että raja-arvo täytyy tuntea, ennen kuin määritelmän ehtoa voidaan tutkia. Cauchy-jonojen avulla suppenemista voidaan (usein) tutkia pelkästään jonon termien avulla ilman raja-arvoa.

Määritelmä 9.1

Metrisen avaruuden (X, d) jono (x_n) on **Cauchy-jono**, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että

$$d(x_n, x_k) < \varepsilon \text{ aina, kun } n, k \geq n_\varepsilon.$$

Lyhyesti: $n, k \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_k) < \varepsilon$

Ranskalainen matemaatikko A-L. Cauchy (1789–1857) käytti ensimmäisenä (?) täsmällisiä menetelmiä (ns. hypergeometrisen) sarjan suppenemisen tutkimiseen.

Lause 9.2

Jokainen suppeneva jono on Cauchy-jono.

Lauseen 9.2 käänteinen puoli ei ole aina voimassa, vaikka se olisi monissa tilanteissa hyödyllistä. Käänteinen suunta pätee (määritelmän mukaan) **täydellisissä** avaruuksissa.

Määritelmä 9.3

Metrinen avaruus on **täydellinen** (complete), jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Vektoriavaruuksien tapauksessa:

Täydellinen sisätuloavaruus = **Hilbertin** avaruus.

Täydellinen normiavaruus = **Banachin** avaruus.

Kaikki Hilbertin avaruudet ovat myös Banachin avaruuksia. Näitä käsitellään omilla kursseillaan MS-C1461 ja MS-C1462.

Huom: (i) Osajoukon A täydellisyyden yhteydessä olennainen vaatimus on se, että Cauchy-jonon raja-arvo kuuluu joukkoon A eikä vain ympäröivään avaruuteen X .

(ii) Täydellisyys riippuu myös metriikasta; esimerkiksi $C([a, b])$ ei ole täydellinen, jos metriikka indusoituu normista

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Banachin kiintopistelause I

Funktion f **kiintopiste** (fixed point) toteuttaa yhtälön $f(x) = x$.
Kiintopistelauseita voidaan käyttää yhtälöiden numeerisen ratkaisemisen lisäksi esimerkiksi todistamaan DY:iden ratkaisujen olemassaolo. Muita versioita ovat Brouwerin ja Schauderin kiintopistelauseet.

Lause 9.5 (Banachin kiintopistelause)

Olkkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ kontraktio, ts. on olemassa vakio $0 \leq q < 1$, jolle

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$. Tällöin

- ① *funktiolla f on yksikäsitteinen kiintopiste $a \in X$.*
- ② *palautuskaavalla $x_{n+1} = f(x_n)$ määritelty jono (x_n) suppenee kohti kiintopistettä a jokaisella alkuarvolla $x_0 \in X$.*

Tarkastellaan esimerkkinä differentiaaliyhtälöä, jonka ratkaisua ei saada ainakaan millään perusmenetelmällä (eikä Maple/Mathematica osaa auttaa).

Esimerkki 9.6

Osoita, että differentiaaliyhtälöön $y' = \sin(ty)$ liittyvällä alkuarvotehtävällä $y(0) = 1$ on yksikäsitteinen ratkaisu $y = y(t)$, joka on määritelty (ainakin) välillä $0 \leq t \leq 1$.

Ratkaisu: Luennolla/monisteessa.

Jonon (x_n) **osajono** (subsequence) saadaan poistamalla osa termeistä ja numeroimalla jäljelle jäävät uudelleen indekseillä $1, 2, 3, \dots$ niin, ettei termien keskinäinen järjestys muutu.

Tarkemmin:

Määritelmä 10.1

Jos $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ on aidosti kasvava, niin jono

$$(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$$

on jonon $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ osajono.

- Osajonolle käytetään usein myös merkintää (x_{n_k}) , jossa $n_k = \varphi(k)$ ja $k = 1, 2, 3, \dots$ on uusi indeksi.
- Aina pätee $\varphi(n) \geq n$, kuten helposti (tai induktiolla) nähdään.
- Suppenevan jonon kaikki osajonot suppenevat kohti alkuperäisen jonon raja-arvoa.

Kompaktius I

Kompakteilla avaruuksilla on monia samanlaisia ominaisuuksia kuin euklidisen avaruuden suljetuilla ja rajoitetuilla joukoilla.

Määritelmä 10.2

Metrinen avaruus on **kompakti** (compact), jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono.

Osajoukon $A \subset X$ kompaktius määritellään tarkastelemalla aliavaruutta $(A, d) \subset (X, d)$ omana avaruutena. Erityisesti raja-arvojen täytyy kuulua joukkoon A eikä vain X :ään.

Yleisessä topologiassa tätä ominaisuutta kutsutaan *jonokompaktiudeksi* ja kompaktius määritellään avointen peitteiden avulla. Metrinen avaruuden tapauksessa nämä käsitteet ovat yhtäpitäviä; vrt. lause 10.8.

Kompaktiuden ominaisuuksia:

- 1 Kompakti $\Rightarrow$ täydellinen.
- 2 Kompakti $\Rightarrow$ rajoitettu.
- 3 Osajoukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti $\Leftrightarrow A$ on suljettu ja rajoitettu.
- 4 Kompaktin avaruuden X osajoukko $A \subset X$ on kompakti $\Leftrightarrow A \subset X$ on suljettu.
- 5 Ääretönulotteisen normiavaruuden suljetut kuulat eivät ole kompakteja.
- 6 Tuloavaruus $X \times Y$ on kompakti täsmälleen silloin, kun X ja Y ovat kompakteja.

Kompaktius $\leftrightarrow$ jatkuvuus

- ① Kompaktius säilyy jatkuvissa kuvauksissa: Jos X on kompakti ja $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, niin $f[X] \subset Y$ on kompakti.
- ② Seuraus: Jos X on kompakti ja $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva bijektio, niin f^{-1} on jatkuva (joten f on homeomorfismi).
Syy: Jos $F \subset X$ on suljettu, niin sen alkukuva

$$(f^{-1})^{-1}[F] = f[F]$$

on suljettu.

- ③ Jos X on kompakti ja $Y \approx X$, niin Y on kompakti.
- ④ Jos $X \neq \emptyset$ on kompakti ja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva, niin f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa X . Toisin sanoen, funktiolla f on maksimi ja minimi joukossa X .
- ⑤ Erityisesti: Jos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu ja $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva, niin funktiolla f on maksimi ja minimi joukossa A .

Alkeellisia esimerkkejä kompaktiuden sovelluksista:

- Jos X on kompakti, niin on olemassa sellaiset pisteet $a, b \in X$, että $d(a, b) = d(X)$.
- Jos $A, B \subset X$ ovat kompakteja joukkoja, niin on olemassa sellaiset pisteet $a \in A$ ja $b \in B$, että $d(a, b) = d(A, B)$.
- Jos X on kompakti ja $f: X \rightarrow]0, \infty[$ on jatkuva, niin on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että $f(x) \geq c$ kaikilla $x \in X$.

Yleisemmin: sup/inf-tyyppisen maksimointi- tai minimointipäätelyn tuloksena saadaan konkreettinen ratkaisu; tämä liittyy myös täydellisyyteen. Tällaisia tilanteita esiintyy mm. osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa ja monissa muissa sovelluksissa.

Seuraava tulos on tekninen apuväline, jota tarvitaan kompaktiuden edistyneemmissä (?) sovelluksissa. Avoimen peitteen määritelmä löytyy kohdasta 10.7.

Lause 10.3

Olkoon $A \subset X$ kompakti ja $\mathcal{D}$ joukon A avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda > 0$, että kaikille $x \in A$ pätee $B(x, \lambda) \subset U$ jollakin $U \in \mathcal{D}$.

Lauseessa esiintyvä λ on peitteen $\mathcal{D}$ **Lebesgue-luku**, joka on siis riippumaton pisteestä x .

Lauseen todistus lienee yksi tämän kurssin hankalimmista, vaikkei se ole kovin pitkä.

Tasainen jatkuvuus I

Lebesguen peitelauseen seuraus:

Lause 10.4

Jos X on kompakti ja $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ on jatkuva, niin f on tasaisesti jatkuva joukossa X ; ts. jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, jolle

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ aina, kun } x, y \in X \text{ ja } d(x, y) < \delta.$$

Tasaisen jatkuvuuden kohdalla sama luku δ toimii kaikkialla, riippumatta pisteiden x, y sijainnista joukossa X , kunhan vain $d(x, y) < \delta$.

Yhden muuttujan funktioille tasainen jatkuvuus suljetulla välillä voidaan todistaa myös ilman Lebesguen peitelausetta, mutta sekin todistus on melko monimutkainen.

Derivoituvan funktion tapaus on selvästi helpompi.

Esimerkki 10.5

Olkoon $L \geq 0$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva, derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja $|f'(x)| \leq L$ kaikilla $x \in]a, b[$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva.

Ratkaisu: Väliarvolauseen nojalla f on L -Lipschitz-jatkuva, josta tasainen jatkuvuus seuraa helposti.

Esimerkki 10.6

Osoita tasaisen jatkuvuuden avulla, että suljetulla välillä jatkuva funktio on Riemann-integroituva.

Ratkaisu: Luennolla/monisteessa.

Määritelmä 10.7

Joukon $A \subset X$ **avoin peite** (open cover) on kokoelma $\mathcal{D}$ avaruuden X avoimia osajoukkoja, joiden yhdiste sisältää joukon A :

$$A \subset \bigcup \mathcal{D} = \bigcup \{U \mid U \in \mathcal{D}\}.$$

Peitteen $\mathcal{D}$ **osapeite** (subcover) on jokin osakokoelma peitteen $\mathcal{D}$ joukoista, jotka edelleen peittävät tarkasteltavan joukon A .

Lause 10.8

Olkoon $A \subset X$. Tällöin joukko A on kompakti $\Leftrightarrow$ Jokaisella joukon A avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Peite-ominaisuus voi tuntua hieman oudolta, mutta sen avulla monet todistukset sujuvat määritelmää helpommin. Esimerkki: Osoita, että kahden kompaktin joukon yhdiste on kompakti.

Määritelmä 11.1

Metrinen avaruus X on **epäyhtenäinen** (disconnected), jos on olemassa osajoukot $A, B \subset X$, joille

- (i) $A \cup B = X$
- (ii) $A \neq \emptyset \neq B$
- (iii) $A \cap B = \emptyset$
- (iv) A ja B ovat avoimia joukkoja avaruudessa X .

Jos avaruus X ei ole epäyhtenäinen, niin se on **yhtenäinen** (connected).

Esimerkki 11.2

Avaruus $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ on epäyhtenäinen.

Ratkaisu: Valitaan $A =]0, \infty[$ ja $B =]-\infty, 0[$.

Yhtenäisyys II

- Osajoukon $E \subset X$ (epä)yhtenäisyys määritellään tulkitsemalla E aliavaruutena; ts. joukkojen A, B täytyy olla avoimia aliavaruudessa E .
- Normiavaruuden avoin ja yhtenäinen osajoukko $D \subset E$ on **alue** (engl. domain, jolla on tosin muitakin merkityksiä).

Lause 11.3

Metriselle avaruudelle X seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- 1 X on epäyhtenäinen.
- 2 $X = C \cup D$, jossa C, D erillisiä, **suljettuja** ja epätyhjiä.
- 3 On olemassa avoin ja suljettu osajoukko $\emptyset \neq A \neq X$.
- 4 On olemassa jatkuva surjektio $f: X \rightarrow \{0, 1\}$.

Todistus: Päättelyketju $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (1)$ on hyvin suoraviivainen. $\square$

Voidaan osoittaa, että

- yhtenäisten joukkojen yhdiste on yhtenäinen, jos kaikilla joukoilla on (ainakin yksi) yhteinen piste;
- jokainen piste $x \in X$ kuuluu yksikäsitteiseen *maksimaaliseen* yhtenäiseen osajoukkoon $C(x) \subset X$. Näitä joukkoja kutsutaan avaruuden X **yhtenäisiksi komponenteiksi**.
- Käytännössä jokainen avaruus jakaantuu erillisiin yhtenäisiin komponentteihin, jotka ovat suljettuja.
- Avaruus on **täysin epäyhtenäinen**, jos $C(x) = \{x\}$ kaikilla $x \in X$.

Lause 11.4

- 1 Jos X on yhtenäinen ja $f: X \rightarrow Y$ jatkuva, niin kuvajoukko $f[X] \subset Y$ on yhtenäinen.
- 2 $A \subset \mathbf{R}$ on yhtenäinen joukko, jossa vähintään kaksi pistettä $\Leftrightarrow A \subset \mathbf{R}$ on väli.
- 3 Jos X on yhtenäinen ja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ on sellainen jatkuva funktio, että $f(x)f(y) < 0$ joillakin $x, y \in X$, niin on olemassa sellainen $z \in X$, että $f(z) = 0$.
- 4 Jos $D \subset \mathbf{R}^n$ on alue, niin sen pisteet voidaan yhdistää toisiinsa murtoviivalla $\gamma \subset D$.

Yhdesti yhtenäisyys I

Avaruuden yhdesti yhtenäisyys on tärkeä käsite, joka liittyy esimerkiksi vektorikentän potentiaalin olemassaoloon ja monistojen luokitteluun.

Määritelmä 11.5

Metrinen avaruus X on **yhdesti yhtenäinen**, jos se on yhtenäinen ja jokaisella jatkuvalla kuvauksella $f: S^1 \rightarrow X$ on jatkuva jatke $F: \overline{B}^2 \rightarrow X$.

Tässä $\overline{B}^2 = \overline{B}(\overline{0}, 1) \subset \mathbf{R}^2$ ja S^1 on sen reunaympyrä $S^1 = S(\overline{0}, 1)$. Kuvaus F on kuvauksen f jatke, jos $F(e) = f(e)$ kaikilla $e \in S^1$.

Intuiitiivisesti ajatellen yhdesti yhtenäisyys tarkoittaa sitä, että jokainen avaruuden X umpinainen silmukka $f[S^1]$ voidaan kutistaa yhdeksi pisteeksi $F(\overline{0})$ jatkuvalla tavalla avaruuden X sisällä ("pintaa" $F[\overline{B}^2]$ pitkin).
Tämän kutistuksen "kaava" on

$$t \mapsto F[S(\overline{0}, 1 - t)], \quad 0 \leq t \leq 1,$$

kun muuttuja t tulkitaan aikaparametriksi.

Äärimmäistä oheislukemista: Matematiikassa on seitsemän kuuluisaa ongelmaa, joiden ratkaisemisesta on luvattu miljoonan dollarin palkinto: <http://www.claymath.org/millennium-problems>. Tämän kurssin käsitteiden avulla voidaan nyt ymmärtää, mistä yhdessä niistä on kysymys.

Lause 11.6

Jos M on yhdesti yhtenäinen 3-monisto, niin $M \approx S^3 = \text{avaruuden } \mathbf{R}^4 \text{ yksikköpallo.}$

Tulos pätee yleisemmin kaikissa dimensioissa $n \geq 2$, mutta tapaus $n = 3$ tunnetaan Poincarén konjektuurin (otaksuman) nimellä. Sen ratkaisi (olennaisilta osin) venäläinen matemaatikko Grigori Perelman n. vuonna 2003, mutta syystä tai toisesta hän kieltäytyi palkinnosta. Muut kuusi ongelmaa ovat vielä ratkaisematta.

Seuraavien sivujen tiivistelmä sisältää tärkeimmät jonoihin liittyvät käsitteet. Tarkoituksena on selventää käsitteiden välisiä yhteyksiä, vaikka suurin osa niistä on käsitelty jo aikaisemminkin.

Määritelmä 12.1

Metrisen avaruuden (X, d) jono (x_n)

- **suppenee** (converges) kohti **raja-arvoa** (limit) $a \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että

$$d(x_n, a) < \varepsilon \text{ aina, kun } n \geq n_\varepsilon.$$

- on **Cauchy-jono**, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että

$$d(x_n, x_k) < \varepsilon \text{ aina, kun } n, k \geq n_\varepsilon.$$

- on **rajoitettu** (bounded), jos on olemassa $a \in X$ ja $r > 0$, joille $x_n \in B(a, r)$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Aina pätee: suppenee $\Rightarrow$ Cauchy $\Rightarrow$ rajoitettu.

Jonon (x_n) **osajono** (subsequence) saadaan poistamalla osa termeistä ja numeroimalla jäljelle jäävät uudelleen indekseillä $1, 2, 3, \dots$ niin, ettei termien keskinäinen järjestys muutu.

Tarkemmin:

Määritelmä 12.2

Jos $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ on aidosti kasvava, niin jono

$$(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$$

on jonon $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ osajono.

- Osajonolle käytetään usein myös merkintää (x_{n_k}) , jossa $n_k = \varphi(k)$ ja $k = 1, 2, 3, \dots$ on uusi indeksi.
- Aina pätee $\varphi(n) \geq n$, kuten helposti (tai induktiolla) nähdään.
- Suppenevan jonon kaikki osajonot suppenevat kohti alkuperäisen jonon raja-arvoa.

Reaalilukujen jonoille on lisäksi olemassa käsitteitä, joilla ei ole (luonnollista) vastinetta yleisessä metrisessä avaruudessa: nouseva, laskeva, monotoninen, alhaalta rajoitettu, ylhäältä rajoitettu.

Reaalilukujonojen tärkeimmät ominaisuudet (Täydellisyysaksioman jono-version jälkeen):

- Jokaisella jonolla on monotoninen osajono.
- Jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.

Jälkimmäisen tuloksen avulla saadaan suoraviivainen todistus sille, että jatkuvalla funktiolla $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on maksimi ja minimi.

Määritelmä 12.3

Metrinen avaruus on **täydellinen** (complete), jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Määritelmä 12.4

Metrinen avaruus on **kompakti** (compact), jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono.

- Aina pätee: Kompakti $\Rightarrow$ täydellinen.
- Osajoukon $A \subset X$ täydellisyys/kompaktius määritellään tarkastelemalla aliavaruutta $(A, d) \subset (X, d)$ omana avaruutena. Erityisesti raja-arvojen täytyy kuulua joukkoon A eikä vain X :ään.

- Euklidinen avaruus $\mathbf{R}^n$ on täydellinen (muttei kompakti).
- Osajoukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on täydellinen $\Leftrightarrow A$ on suljettu.
- Osajoukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti $\Leftrightarrow A$ on suljettu ja rajoitettu.

Huomaa kuitenkin ero: Ääretönulotteisen normiavaruuden E suljetut kuulat $\overline{B}(x, r)$ eivät ole kompakteja (mutta ne ovat täydellisiä, jos E on täydellinen)

Metrisen avaruuden suljetuilla osajoukoilla on usein samoja ominaisuuksia kuin koko avaruudella.

- Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin pätee:

osajoukko $A \subset X$ on täydellinen $\Leftrightarrow A \subset X$ on suljettu.

- Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Tällöin pätee:

osajoukko $A \subset X$ on kompakti $\Leftrightarrow A \subset X$ on suljettu.

Lisäksi tuloavaruus $X \times Y$ on kompakti täsmälleen silloin, kun X ja Y ovat kompakteja. Vastaava tulos on voimassa myös täydellisyyden kohdalla.

- Täydellisyys ei säily jatkuvissa kuvauksissa (eikä edes homeomorfismeissa). Esimerkiksi $\mathbf{R} \approx]0, 1[$.
- Kompaktius säilyy jatkuvissa kuvauksissa. Toisin sanoen, jos X on kompakti ja $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, niin $f[X] \subset Y$ on kompakti.
- Jos $X \neq \emptyset$ on kompakti ja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva, niin f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa X . Toisin sanoen, funktiolla f on maksimi ja minimi joukossa X .