Valonnopeuden vakioisuus

Maxwellin yhtälöt tyhjiössä (eli ei varauksia tai virtoja)

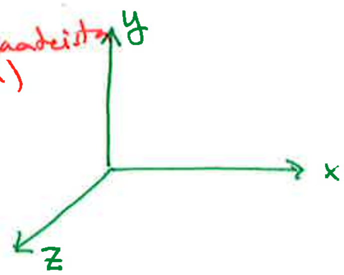
$$
\begin{cases}
\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0 & \oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \\[2ex]
\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_{A_L} \vec{B}\cdot d\vec{A} & \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{A_L} \vec{E}\cdot d\vec{A}
\end{cases}
$$

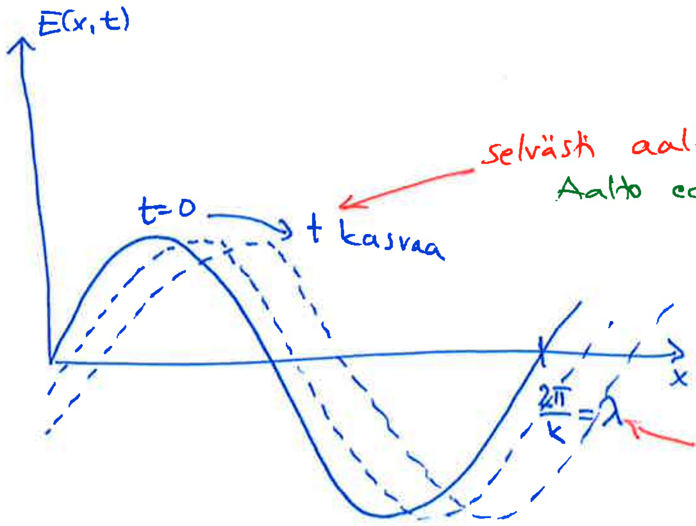
(Faradayn laki) (Maxwell-Amperen laki)

Tehdään tasoaaltoyrite:

eivät riipu y,z-koordinaateista (tasoaaltoja)

$$
\begin{cases}
\vec{E}(x,y,z) = E_0 \sin(kx-\omega t)\hat{y} = E(x,t)\hat{y} \\
\vec{B}(x,y,z) = B_0 \sin(kx-\omega t)\hat{z} = B(x,t)\hat{z}
\end{cases}
$$





selvästi aalto etenee oikealle ajan t edetessä.

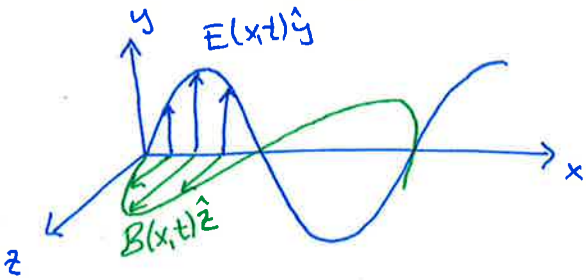
Aalto edennyt aallonpituutensa verran ajassa $\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Aallon nopeus on $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k}$.

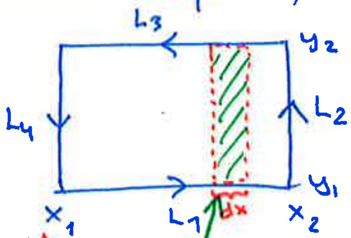
aallonpituus $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Tavoite: hyödynnetään Faradayn lakia sekä Maxwell-Amperen lakia ja ratkaistaan millaiset reunaehdot yritteen parametreille E_0, B_0, ω, k pätee.

Ensiksi hyödynnetään Faradayn lakia



Valitaan suljettu polku L yx-tasossa (eli $z=0$)



koostuu neljästä janasta L_1, L_2, L_3, L_4. Kierretään vastapäivään.

vakio $\vec{E} = E(x_2,t)\hat{y}$

$\vec{E} = E(x_1,t)\hat{y}$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{L_2} \vec{E}\cdot \underbrace{d\vec{\ell}}_{d\ell\hat{y}} + \int_{L_4} \vec{E}\cdot \underbrace{d\vec{\ell}}_{-d\ell\hat{y}} = (y_2-y_1)\left[E(x_2,t) - E(x_1,t)\right].$$

janoilla L_1 ja L_3 on $\vec{E} \perp d\vec{\ell}$ $\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$.

$$= (y_2-y_1)E_0\left[\sin(x_2k-\omega t) - \sin(kx_1-\omega t)\right].$$

Toisaalta

Magneettikentän vuo kapean kaistaleen lävitse.

$$-\frac{d}{dt}\int_{A_L} \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} B(x,t)\cdot(y_2-y_1)\,dx$$

$$= -(y_2-y_1)B_0\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\sin(kx-\omega t)\,dx}_{-\frac{\omega}{k}\left[\sin(kx_2-\omega t) - \sin(kx_1-\omega t)\right]}$$

LASKE!

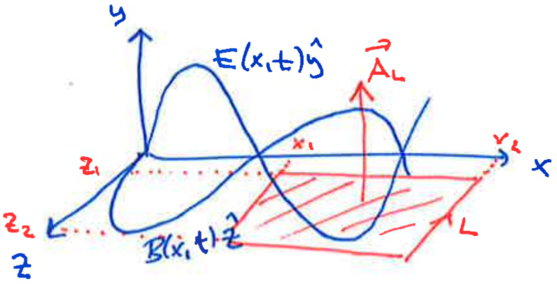
$$= (y_2-y_1)B_0\frac{\omega}{k}\left[\sin(kx_2-\omega t) - \sin(kx_1-\omega t)\right]$$

Faradayn laki:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_{A_L}\vec{B}\cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{E_0 = B_0\frac{\omega}{k}}$$

Seuraavaksi Maxwell-Amperen laki



Valitaan suljettu polku L xz-tasossa ($y=0$).

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = (z_2-z_1)\left[B(x_1,t) - B(x_2,t)\right]$$
$$= (z_2-z_1)B_0\left[\sin(kx_1-\omega t) - \sin(kx_2-\omega t)\right]$$

Toisaalta

$$\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_{A_L}\vec{E}\cdot d\vec{A} = \mu_0\epsilon_0(z_2-z_1)\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}E(x,t)\,dx$$
$$= \mu_0\epsilon_0(z_2-z_1)E_0 \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\sin(kx-\omega t)\,dx}_{-\frac{\omega}{k}\left[\sin(kx_2-\omega t) - \sin(kx_1-\omega t)\right]}$$

$$= (z_2-z_1)\mu_0\epsilon_0E_0\frac{\omega}{k}\left[\sin(kx_1-\omega t) - \sin(kx_2-\omega t)\right]$$

Maxwell-Amperen laki:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_{A_L}\vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_0 = \mu_0\epsilon_0E_0\frac{\omega}{k}}.$$

Lopuksi yhdistetään tulokset:

$$\begin{cases} E_0 = B_0 \dfrac{\omega}{k} \\ B_0 = \mu_0 \epsilon_0 E_0 \dfrac{\omega}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 = \left(\mu_0 \epsilon_0 E_0 \frac{\omega}{k}\right) \cdot \frac{\omega}{k} = \mu_0 \epsilon_0 E_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \qquad \Big| : E_0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

Mutta $\frac{\omega}{k} = v =$ aallon etenemisnopeus.

μ_0, ϵ_0 ovat luonnonvakioita

$\Rightarrow$ aallon etenemisnopeus on luonnonvakio, valon nopeus!

$\Rightarrow$ valonnopeus $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}$

Ja lisäksi reunaehto sähkö- ja magneettikenttien amplitudeille

$$E_0 = B_0 \cdot \frac{\omega}{k} = B_0 \cdot c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{E_0}{B_0} = c}$$

(Sähkömagneettiselle säteilylle)