

Nimi:

Opiskelijanumero:

Harjoitusryhmä:

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Todistustäydennys 1T

Aihepiiri: Reaaliluvut (MC-monisteet)

Palauta tämä paperi yhdessä tehtävien 1P kanssa tiistaihin 15.1. klo 12.15 mennessä. Kukaan tehtävä arvostellaan asteikolla 0–3. Näitä papereita jaetaan luen-
nolla ja luennoitsijan työhuoneen M227 viereisessä riippukansiossa. Voit myös
tulostaa tehtävät MC-sivulta.

1. Täydennä Täydellisyysaksioman version (ii)’ todistus (luentokalvot 23–24):
Jokainen laskeva ja alhaalta rajoitettu reaalilukujono (b_n) suppenee.

Todistus. Oletaan, että versio (ii) on voimassa: Jokainen nouse-
va ja ylhäältä rajoitettu jono suppenee.

Olkoon $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ laskeva ja alhaalta rajoitettu jono. Tämä tar-
koittaa sitä, että

$$\text{_____} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

ja

$$\exists \text{_____}.$$

Tällöin kaavalla $a_n = -b_n$ määritelty jono (a_n) on nouseva, koska

$$a_{n+1} = \text{_____} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Se on myös ylhäältä rajoitettu, koska

$$\text{_____}.$$

Täydellisyysaksioman version (ii) mukaan jono (a_n) suppenee
kohti jotakin raja-arvoa $L \in \mathbf{R}$. Tällöin raja-arvon laskusään-
töjen mukaan jono (b_n) suppenee kohti raja-arvoa

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{_____} = \text{_____} = \text{_____}.$$

Väite on siis todistettu. $\square$

2. Täydennä seuraava suppiloperiaatteen todistus: Jos $a_n \leq b_n \leq c_n$ jostakin indeksistä alkaen ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L,$$

niin jono (b_n) suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Todistus. Koska jonon alkuosa ei vaikuta sen suppenemiseen tai raja-arvoon, niin voidaan olettaa, että $a_n \leq b_n \leq c_n$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Osoitetaan, että $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Täytyy osoittaa, että $|b_n - L| < \varepsilon$ jostakin indeksistä alkaen. Idea: Lauseketta $b_n - L$ täytyy arvioida molempiin suuntiin; toisessa tarvitaan (a_n) -jonoa ja toisessa (c_n) -jonoa: Piirrä kuvio!

Koska $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, niin on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbf{N}$, että

aina, kun $n \geq n_1$. Koska $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, niin on olemassa sellainen $n_2 \in \mathbf{N}$, että

aina, kun _____

Valitaan

$$n_\varepsilon = \text{_____}.$$

Tällöin arvoilla $n \geq n_\varepsilon$ on voimassa $n \geq n_1$, joten

$$L - b_n \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \text{_____}.$$

Lisäksi arvoilla $n \geq n_\varepsilon$ on voimassa $n \geq n_2$, joten

$$b_n - L \leq c_n - L \leq \text{_____} < \text{_____}.$$

Näistä epäyhtälöistä seuraa, että

$$|b_n - L| < \text{_____}$$

aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Väite on siis todistettu. $\square$