

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Laskuharjoitus 1P viikolla 2 (9.–11.1.)

Aihepiiri: Reaaliluvut (MC-monisteet)

Tehtävät 2b–5 palautetaan kirjallisesti laskutupaa Y190c vastapäätä olevaan lokkerikkoon ja kukin niistä arvostellaan asteikolla 0–3. Harjoituksen 1P palautusten takaraja on ti 15.1. klo 12.15. **Myös todistustäydennyksen 1T palautuksen takaraja on sama, ja sen voi niitata kaikkien palautusten kansilehdeksi.**

1. (Pohdiskelutehtävä harjoituksen alkuun; ei tarvitse palauttaa)
Määritä seuraavien joukkojen supremum ja infimum sekä maksimi ja minimi, jos ne ovat olemassa:
 $A = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}\};$
 $B = [0, \pi] \cap \mathbf{Q}.$
Tarpeellinen lisätieto: $\pi \notin \mathbf{Q}.$

2. a) (Pohdiskelua harjoituksen alkuun; ei tarvitse palauttaa)
Oletetaan, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Muotoile täsmällisesti ja perustele raja-arvon määritelmää käyttämällä seuraava väite: *Jostakin indeksistä alkaen on $a_n > 1/2$.*

- b) (**Palautettava kohta**) Yleistä a-kohdan tulos tilanteeseen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow b_n \neq 0 \text{ jostakin indeksistä alkaen.}$$

Vihje: $|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n|$ kolmioepäyhtälön (kalvo 11) vasemman puolen perusteella.

3. **Valitse a- tai b-kohta.**

- a) "Helppo?": Olkoon

$$a_n = \frac{n+1}{2n+1},$$

kun $n \in \mathbf{N}$. Tutki, onko jono (a_n) nouseva, laskeva, ylhäältä rajoitettu tai alhaalta rajoitettu. Määritä jonon raja-arvo, jos se on olemassa. Raja-arvon laskusääntöjä voi käyttää.

- b) "Hankalampi?": Vastaavat kysymykset jonolle (b_n) , kun

$$b_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}.$$

4. Todista määritelmästä lähtien raja-arvon laskusääntö (luentokalvot 18–19)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

kun $a_n \rightarrow a$ ja $b_n \rightarrow b$.

5. *Kochin käyrä* yhdistää pisteet $(0, 0)$ ja $(1, 0)$ ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$. Se määritellään approksimoivien murtoviivojen "raja-arvona"

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$$

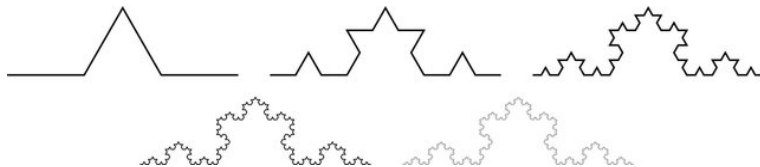
seuraavalla tavalla¹.

Approksimaatio

$$K_0 = [0, 1] \subset \mathbf{R} \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2$$

on pelkkä jana. Approksimaatiossa K_1 janan K_0 keskimäinen kolmannes korvataan tasasivuisen kolmion kahdella kyljellä 1. kuvion mukaisesti. Seuraavassa approksimaatiossa K_2 jokainen käyrän K_1 jana (4 kappaletta, pituus = $1/3$) korvataan käyrän K_1 skaalatulla (suhde = $1/3$) ja kierretyllä/siirretyllä kopiolla. Yleisesti käyrä K_{n+1} saadaan korvaamalla jokainen käyrän K_n jana skaalatulla (suhde = $1/3^n$) ja kierretyllä/siirretyllä kopiolla käyrästä K_1 .

- a) Tutustu kaarenpituuden yleiseen määritelmään (MC-materiaalit: Reaaliluvuista, esimerkki 1.2.) ja osoita, ettei Kochin käyrä ole suoristuva; t.s. $\ell(K) = \infty$.
b) Laske Kochin käyrän ja x -akselin väliin jäävä pinta-ala (alkeellisesti geometrisen sarjan avulla).



Huom: Kochin *lumihiihtokäyrä*ssä kolme symmetrisesti asetettua Kochin käyrää muodostaa umpinaisen tasokäyrän, katso animaatio sivulta https://fi.wikipedia.org/wiki/Kochin_käyrä

Vihjeitä:

3b: $\sup \{ \varepsilon / 2 + 1 > \dots > \frac{u(\varepsilon/2) + 1}{\varepsilon} > \frac{u(\varepsilon/2) + 1}{\varepsilon^{1+u}} > \frac{1+u(\varepsilon/2) + 1}{\varepsilon^{1+u}} \}$

4: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}$ (todistus: $\sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$ ja $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}$)

¹Kurssilla myöhemmin käsiteltävien tulosten avulla voidaan osoittaa, että raja-arvo esittää todella tasokäyrää; ts. sillä on jatkuva parametrisointi.