

MS-A0002 Matriisilaskenta

3. Matriisialgebra

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

3.1 Lineaarikuvaukset

Lineaariset yhtälöt ovat “vektoreille luonnollisia” yhtälöitä, joita ratkotaan mm. sähkömagnetiikassa, mekaniikassa, tietotekniikassa, taloustieteissä, ekologiassa jne.

Määritelmä 1

Funktio $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *lineaarinen* (eli lineaarikuvaus), jos

- (i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- (ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ kaikille $c \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Huomioita

- Ehdot (i) ja (ii) voidaan lausua myös yhdessä:
 $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$ kaikille $c, d \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
Edelleen (induktiolla)
 $T(c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_k\mathbf{u}_k) = c_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{u}_k)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, kaikille $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$.
Lineaarikuvaus säilyttää lineaarikombinaatiot.
- Mielivaltaiselle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ pätee $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
Lineaarikuvaus pitää origon paikallaan.
- Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ määräämä kuvaus $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ on lineaarinen (määritelmä toteutuu).
- Lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ voidaan aina esittää matriisikuvauksena (nähdään esimerkin jälkeen).

3.1 Lineaarikuvaukset

Esimerkki 2

Määritellään lineaarikuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä pisteiden $\mathbf{u} = (4, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 3)$ ja $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (6, 4)$ kuvapistet. Totea, että $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Standardikantavektorit avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ovat

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0, 0),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Identiteettimatriisi (yksikkömatriisi) I_n on matriisi, jonka j :s sarake (yhtä lailla rivi) on j :s standardikantavektori:

$$I_n = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 Lineaarikuvaukset

Lause 3

Jokainen lineaarikuvaus $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ voidaan esittää matriisikuvauksena $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, missä matriisin A sarakkeet ovat kantavektorien $\mathbf{e}_j$ kuvat:

$$A = (T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n)).$$

Esimerkki 4

Olko $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle $T(\mathbf{e}_1) = (5, -7, 2)$ ja $T(\mathbf{e}_2) = (-3, 8, 0)$. Etsitään matriisi $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ siten, että $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

3.1 Lineaarikuvaukset

Ratkaisu: Koska mielivaltainen $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ voidaan esittää muodossa $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ja koska T on lineaarinen, niin

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) \\ &= x_1(5, -7, 2) + x_2(-3, 8, 0) = (5x_1 - 3x_2, -7x_1 + 8x_2, 2x_1 + 0x_2) \end{aligned}$$

eli sarakemuodossa

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}.$$

Matriisi A on lineaarikuvauksen T esitys standardikannassa.

3.1 Lineaarikuvaukset

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

missä $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ on eräs suoran piste ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on suoran suuntavektori.

Lause 5

Lineaarikuvaus kuvaa suoran suoraksi.

Todistus.

Luentoharjoitus.



3.1 Lineaarikuvaukset

Kaikki tason lineaarikuvaukset (eli kuvaukset $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ovat)

- venytyksiä
- peilauksia
- kiertoja
- projektioita

tai näiden yhdisteitä.

3.1 Lineaarikuvaukset

Projektiomatriiseja

Projektio x -akselille: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Projektio y -akselille: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Venyysmatriiseja

Venyys x -suunnassa kertoimella k : $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Venyys y -suunnassa kertoimella k : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

3.1 Lineaarikuvaukset

Peilausten matriiseja

Peilaus x -akselin suhteen: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Peilaus y -akselin suhteen: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Peilaus suoran $y = x$ suhteen: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Peilaus suoran $y = -x$ suhteen: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Peilaus origon suhteen: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3.1 Lineaarikuvaukset

Pyöritysmatriisi

Matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

pyörittää xy -tason pistettä kulman φ verran origon ympäri vastapäivään.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Idea: Lineaarikuvausten laskutoimitusten avulla määritellään vastaavat matriisien laskutoimitukset.

Vakiolla kertominen ja summa. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Silloin $tA, A + B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ja määritellään

$$tA = \begin{bmatrix} tA_{11} & tA_{12} & \dots & tA_{1m} \\ tA_{21} & tA_{22} & \dots & tA_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ tA_{n1} & tA_{n2} & \dots & tA_{nm} \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1m} + B_{1m} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2m} + B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} + B_{n1} & A_{n2} + B_{n2} & \dots & A_{nm} + B_{nm} \end{bmatrix}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 6

$$\begin{aligned} (-2) \begin{bmatrix} +1 & -2 & +3 \\ -4 & +5 & -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & +4 & -6 \\ +8 & -10 & +12 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \\ 21 & 26 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Huom. Jotta $A + B$ olisi määritelty, on matriisien A ja B oltava samankokoiset!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Olkoon $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Yhdistetty kuvaus on mielekäs vain muodossa $G \circ F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Jos F ja G ovat lineaarikuvauksia, niin $G \circ F$:kin on.

Olkoon B kuvauksen F matriisi ja A kuvauksen G matriisi. Tällöin $G \circ F$ on

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = A(B(x)) = ABx.$$

AB on *matriisitulo*.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmä 7

Olkoot $\underbrace{A}_{p \times n} = (\alpha_{ij})$ ja $\underbrace{B}_{n \times q} = (\beta_{ij})$. Tällöin $\underbrace{C}_{p \times q} = AB = (\gamma_{ij})$, missä

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

Muistisääntö: $\underbrace{C}_{p \times q} = \underbrace{A}_{p \times n} \underbrace{B}_{n \times q}$.

Huom! Matriisitulo ei ole vaihdannainen eli se ei kommutoi: yleisesti $AB \neq BA$!

Huom! Tulo voi olla nolla, vaikka kumpikaan matriisi ei olisi nollamatriisi!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Olkoot

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nyt $A + B$, AB ja BA eivät ole mielekkäitä (vastaavilla lineaarikuvauksilla menisivät dimensiot solmuun tällaisista yhdistelmistä). Kuitenkin voidaan laskea

$$BA = \begin{bmatrix} 9(-1) + 8(-3) & 9(-2) + 8(-4) \\ 7(-1) + 6(-3) & 7(-2) + 6(-4) \\ 5(-1) + 4(-3) & 5(-2) + 4(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & -50 \\ -25 & -38 \\ -17 & -26 \end{bmatrix}$$

ja

3.2 Matriisien laskutoimitukset

$$\begin{aligned} A^2 := AA &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)(-1) + (-2)(-3) & (-1)(-2) + (-2)(-4) \\ (-3)(-1) + (-4)(-3) & (-3)(-2) + (-4)(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 8

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Laske AB , AC , BC ja CB .

Vastaus: $AB = B$, $AC = C$ (vrt. $1 \cdot x = x$),

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad CB = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 9

Olkoon $\mathbf{x} = (-1, -2, -3) \in \mathbb{R}^3$ ja lineaarikuvauksen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ matriisi

$$A_F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} A_F \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1) + 3(-2) + 4(-3) \\ 5(-1) + 6(-2) + 7(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -38 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

joten $F(-1, -2, -3) = A_F \mathbf{x} = (-20, -38)$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 10

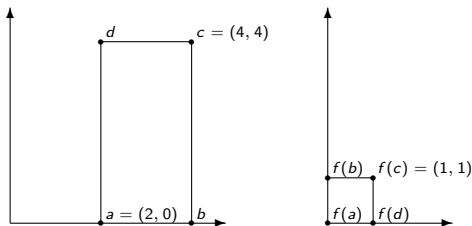
Tason suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja sen kulmat ovat vastapäivään lueteltuina $a = (2, 0)$, b , $c = (4, 4)$ ja d . Suorakulmiolle suoritetaan muunnos f , joka kuvaa sen peilatuksi neliöksi toiseen paikkaan tasossa. Suorakulmion kulmat kuvautuvat muunnoksessa siten, että $f(a) = (0, 0)$ ja $f(c) = (1, 1)$, sivut koordinaattiakselien suuntaiset ja kulmat ovat vastapäivään lueteltaessa $f(a)$, $f(d)$, $f(c)$ ja $f(b)$.

Etsi matriisi, jolla voit esittää muunnoksen, ja selvitä mikä on pisteen $(3, 1)$ kuva muunnoksessa.

Huom: Kyseessä ei ole lineaarikuvaus, mutta käyttämällä ns. homogeenisia koordinaatteja eli kirjoittamalla piste (x, y) muodossa $(x, y, 1)$ se voidaan esittää matriiseilla!

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Ratkaisu: Piirretään ensin kuvat:



Muunnoksen voi toteuttaa siirtämällä kuvio ensin siten, että sen piste $(2, 0)$ tulee origoon (matriisi M_1), pienentämällä kuvio puolittamalla x -koordinaattiarvot ja jakamalla y -koordinaattiarvot luvulla 4 (matriisi M_2) ja lopulta peilaamalla suoran $x = y$ suhteen (koordinaattiarvojen vaihto keskenään, matriisi M_3).

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Jotta saisimme myös siirron (joka ei ole lineaarikuvaus tasossa!) esitettyä matriisilla, tarkastellaan pisteen (x, y) sijaan pistettä $(x, y, 1)$. Viimeinen koordinaatti on vain apuna mukana, kaksi ensimmäistä esittävät todellisuudessa tarkasteltavaa tason pistettä.

Nyt siirto $(x, y, 1) \mapsto (x - 2, y, 1)$ voidaan esittää matriisilla seuraavasti:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} .$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriisi, joka kutistaa puoleen x -suunnassa ja neljännekseen y -suunnassa, eli tekee operaation $(x, y, 1) \mapsto (x/2, y/4, 1)$ on

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/2 \\ y/4 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Lopuksi vielä peilaus $(x, y, 1) \mapsto (y, x, 1)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} .$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Koko operaation suorittava matriisi saadaan tekemällä nämä peräjäälkeen:

$$\begin{aligned} M &= M_3 M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Piste (x, y) kuvautuu siis pisteeksi $(y/4, x/2 - 1)$ ja erityisesti pisteen $(3, 1)$ kuva on $(1/4, 1/2)$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriiseille voidaan lisäksi määritellä laskutoimitus, joka tekee $n \times m$ -matriisista $m \times n$ -matriisin vaihtamalla rivit ja sarakkeet.

Määritelmä 11 (Transpoosi)

Olko $\underbrace{A}_{n \times m} = (\alpha_{ij})$. Tällöin matriisin A transpoosi on matriisi

$$A^T = (\gamma_{ij}), \quad \text{missä } \gamma_{ij} = \alpha_{ji}$$

Yhdistetylle kuvaukselle $C = AB$ pätee $C^T = B^T A^T$.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Määritelmä 12

Matriisi B on matriisin A *käänteismatriisi*, jos

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

missä I on sopivan kokoinen identiteettimatriisi.
Käänteismatriisia merkitään A^{-1} .

Lause 13

Jos käänteismatriisi on olemassa, niin se on yksikäsitteinen.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Huom.

- Jos matriisi A on kääntyvä, niin myös matriisi A^{-1} on kääntyvä, ja

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

- Jos A ja B ovat kääntyviä matriiseja, niin myös AB on kääntyvä, ja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- Jos A on kääntyvä, niin myös A^T on kääntyvä, ja

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Käänteismatriisin laskeminen: Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kääntyvä. Miten lasketaan $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$? Nyt $AA^{-1} = I_n$ eli jos $\mathbf{x}_j$ on matriisin A^{-1} j :s sarake, niin saadaan n kpl lineaarisia yhtälöitä

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ratkotaan nämä n yhtälöä yhtä aikaa Gauss-eliminaatiolla: liittomatriisi

$$[A \mid I_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

muunnetaan liittomatriisiksi $[I_n \mid A^{-1}]$. Siis

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 14

Lasketaan matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} [A \mid I_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] = [I_2 \mid A^{-1}] \end{aligned}$$

Siten $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. (Tarkista kertolaskulla!)

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Esimerkki 15

Mikä on matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

transpoosi?

Esimerkki 16

Etsi matriisien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisit.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

Terminologiaa:

- $\underbrace{A}_{n \times n}$ on neliömatriisi; symmetrinen, jos $A = A^T$.
- A on säännöllinen (sanotaan myös kääntyvä), jos käänteismatriisi on olemassa, muutoin singulaarinen.
- $A = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn})$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

on lävistäjä- eli diagonaalimatriisi.

3.2 Matriisien laskutoimitukset

- Yläkolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j > k$
- Alakolmiomatriisi: $\alpha_{jk} = 0$, kun $j < k$
- A on ortogonaalinen, jos $A^{-1} = A^T$.

Esimerkki 17

Laadi 3×3 -esimerkkimatriisit näistä kaikista.

3.3 Determinantti

Idea: Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determinantti $\det(A) \in \mathbb{R}$ ilmaisee miten paljon matriisia vastaava lineaarikuvaus “skaalaa&peilaa” avaruutta $\mathbb{R}^n$: Kuution

$$[0, 1]^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j : x_j \in [0, 1]\}$$

“*n*-tilavuus” on 1 (1-til.=pituus, 2-til.=pinta-ala, 3-til.=tavallinen tilavuus, ...) ja A :n sarakkeiden virittämän “särmion”

$$A[0, 1]^n = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0, 1]^n\}$$

n-tilavuus on $|\det(A)|$ (determinantin etumerkki kertoo peilautumisista).

Determinantin laskemiseen tarvitaan neljä lakia:

3.3 Determinantti

Laki 1:

$$\det(I_n) = 1.$$

Tulkinta 1: Identiteettikuvaus $x \mapsto I_n(x) = x$ ei muuta n -tilavuutta tai suuntia.

Laki 2:

Matriisin sarake t – kertaistuu $\Rightarrow$ determinantti t – kertaistuu.

Tulkinta 2: “Särmiön n -tilavuus” t -kertaistuu yhden särmän t -kertaistuessa.

3.3 Determinantti

Esimerkki 18

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\S 2}{=} (-2)(3) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\S 1}{=} -6.$$

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \stackrel{\S 2}{=} (6)(5)(4) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\S 1}{=} 120.$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \stackrel{\S 2}{=} (0) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

3.3 Determinantti

Laki 3: Jos matriisissa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on (ainakin) kaksi samaa saraketta, niin

$$\det(A) = 0.$$

Tulkinta 3: Tällöin särmiö $A[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ on "litistynyt" ja sen n -tilavuus on 0.

Esimerkki 19

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \stackrel{\S 3}{=} 0, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\S 3}{=} 0, \quad \det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\S 3}{=} 0.$$

3.3 Determinantti

Laki 4: Olkoon A_j matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ j :s sarake. Kun $A_k = B_k + C_k$ jollakin $k \in \{1, \dots, n\}$, niin

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & B_k + C_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{bmatrix} \\ = & \det \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & B_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{bmatrix} \\ + & \det \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & C_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Tulkinta 4: Särmiön yhden särmän summaus näkyy n -tilavuudessa summana.

3.3 Determinantti

Esimerkki 20

$$\begin{aligned}
 0 & \stackrel{\S 3}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \stackrel{\S 3, \S 1}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1, \\
 \text{joten } \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= -1.
 \end{aligned}$$

3.3 Determinantti

Esimerkki 21 (lasketaan luennolla)

Laske matriisin $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ determinantti lakien §1-§4 avulla.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{\S 4}{=} \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{\S 2}{=} ad \det(I) + ab \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + bc \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + cd \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{\S 1 \& \S 3}{=} ad + 0 - bc + 0,
 \end{aligned}$$

sillä äsken laskettiin $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$.

3.3 Determinantti

Lait 1, 2, 3, 4 ovat ristiriidattomat ja riittävät determinantin laskemiseen. Käytännössä determinantit kuitenkin lasketaan käsin

- muistamalla, että

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

- ja purkamalla matriisi 2×2 -osiin *alideterminanttisäännöllä*

$$\det(A) = (-1)^k \sum_i (-1)^i A_{ki} \det(A^{*ki}),$$

missä k on jokin rivinumero ja A^{*ki} matriisi A , josta on poistettu rivi k ja sarake i .

3.3 Determinantti

Determinanttia merkitään myös lyhyesti pystyviivoilla:

$$|M| := \det(M), \text{ kun } M \text{ on matriisi.}$$

Esimerkki 22

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg). \end{aligned}$$

3.3 Determinantti

Huom. Myös 3×3 -matriisin determinantille on muistisääntö:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

“alamäkeen positiivisina, ylämäkeen negatiivisina”.

Esimerkki 23

Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ determinantti.

Vastaus: $\det(A) = 42$

3.3 Determinantti

Lause 24

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Silloin

$$\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0 \quad \text{ja} \quad \det(A^T) = \det(A).$$

Lause 25

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

3.3 Determinantti

Esimerkki 26

Millä kertoimilla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ koskevalla ehdolla matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{on käänteismatriisi?}$$

Mikä silloin on käänteismatriisi A^{-1} ?

Tarkista, että $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.