Luku 7 Työ ja energia

Muuttuvan voiman tekemä työ
Liike-energia

Tavoitteet:

- Selittää työn käsite
- Mallittaa voiman tekemä työ
- Mallittaa liike-energian ja työn keskinäinen riippuvuus

Esitiedot

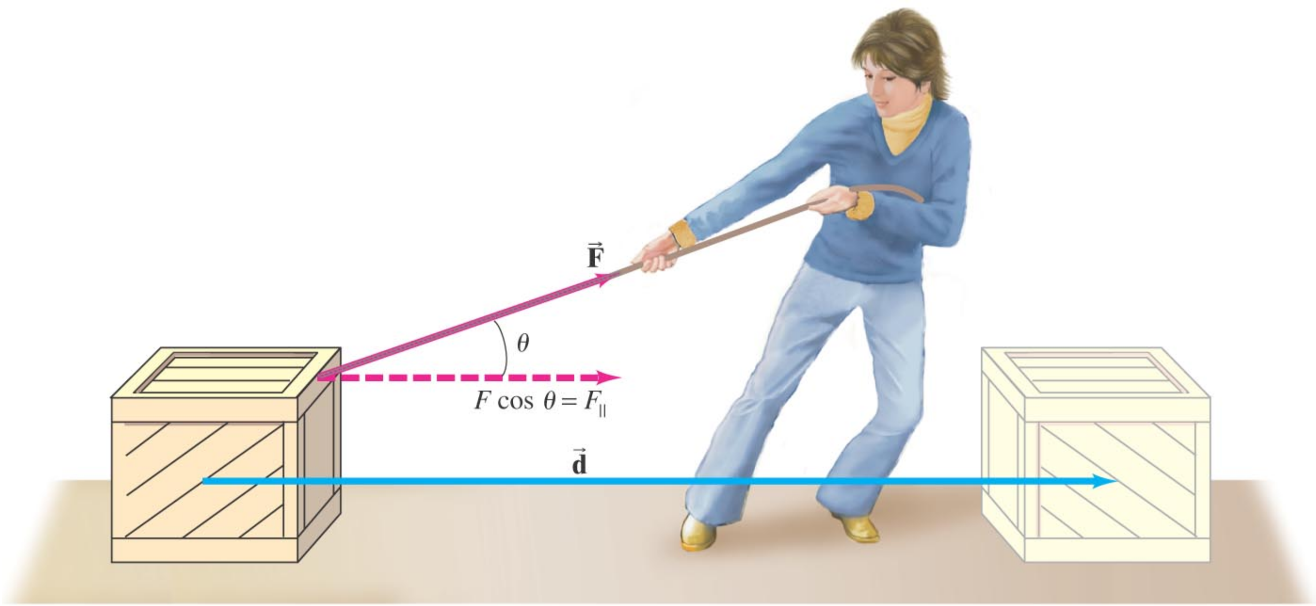
- Newtonin lait ja selvä käsitys voimista

7.1-3 Työ

Vakiovoiman tekemä työ on $$W = F_{\parallel} d$$

Yksikkö
$[W] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$

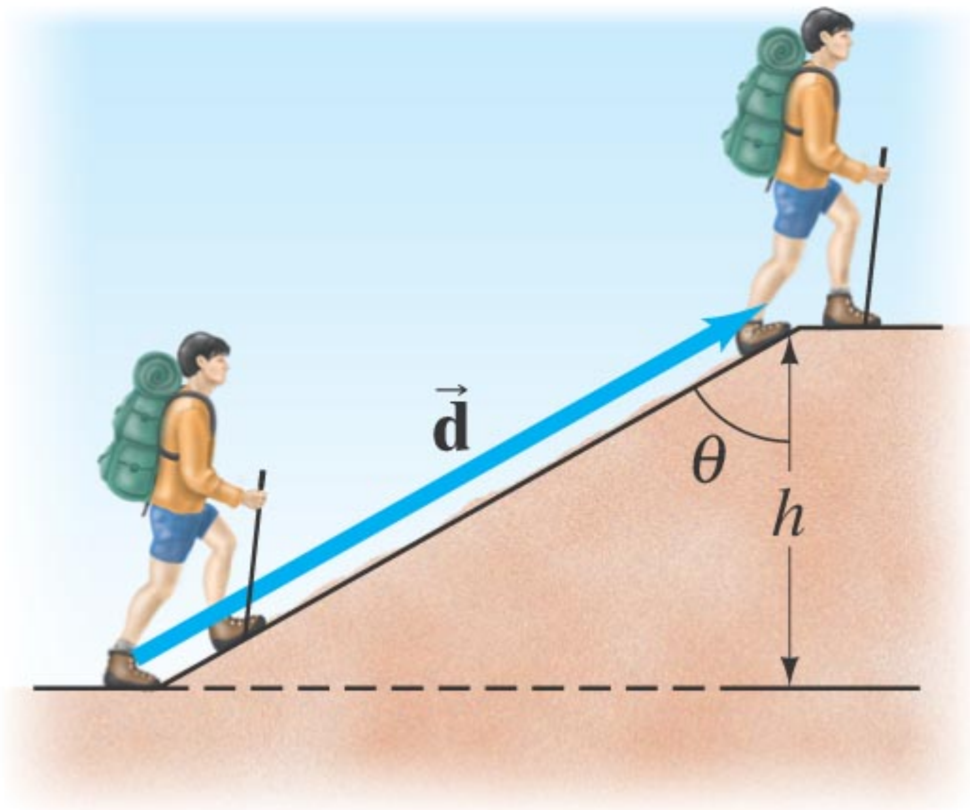
Figure 7.1



Esimerkki 7-2: Reppu

Vaeltaja nousee 10.0 m korkean mäen päälle 15 kg:n reppu selässään. Oletetaan hänen kävelevän vakionopeudella. Määritä

a) kuinka suuren työn vaeltaja tekee reppuun.
b) kuinka suuren työn painovoima tekee reppuun.
c) reppuun tehty kokonaistyö.



(a)

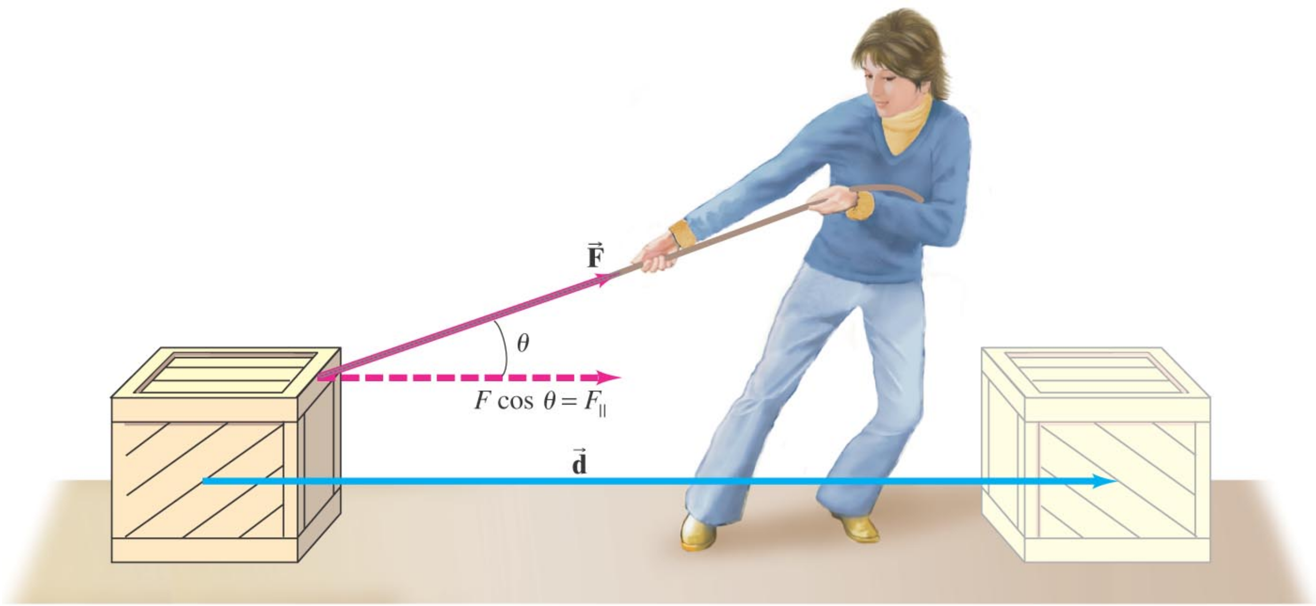
Työ ja pistetulo

Vakiovoiman tekemä työ on

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$W = Fd\cos\theta$$

Figure 7.1



Esimerkki 7-4

Vaunua vedetään matka $\vec{d} = 100\mathrm{m}\,\hat{i}$

voimalla $\vec{F} = 20\mathrm{N}\left(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}\right)$

Määritä vetäjän vaunuun tekemä työ.

Usean voiman tekemä työ

$$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r} = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right) \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}_{tot} \cdot \Delta\vec{r}$$

Kokonaistyö saadaan kokonaisvoiman avulla

Huomaa!

- Työn etumerkki on tärkeä, joten katso, mikä voima tekee työtä ja mihin suuntaan.
- Tee itsellesi selväksi mitkä voimat vaikuttavat kappaleeseen.

Huomaa ero!

- Voiman tekemä työ
- Kappaleeseen tehty työ

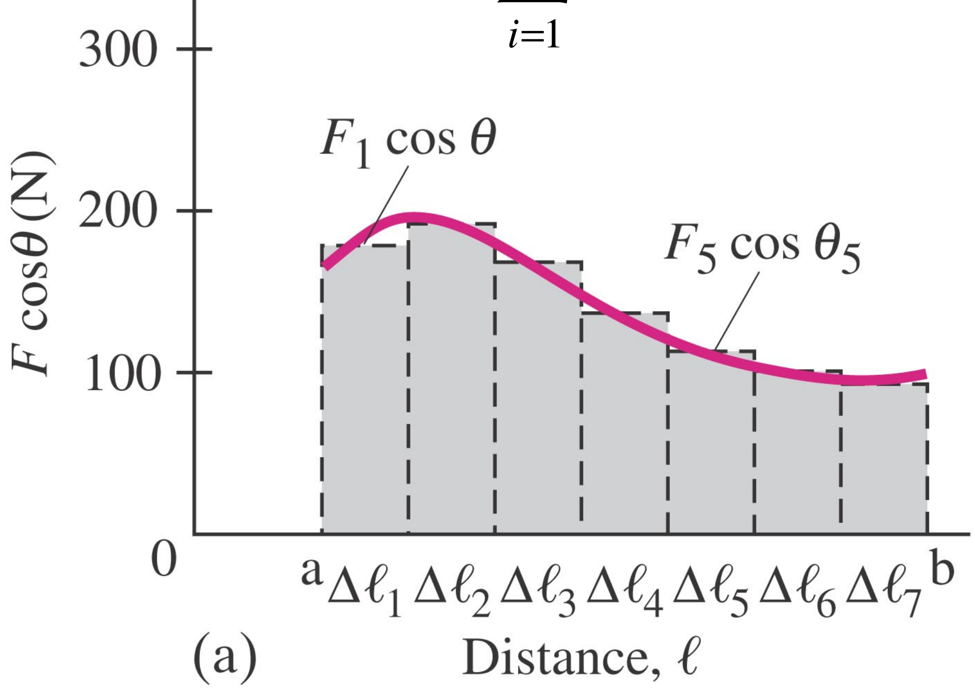
Muuttuvan voiman tekemä työ

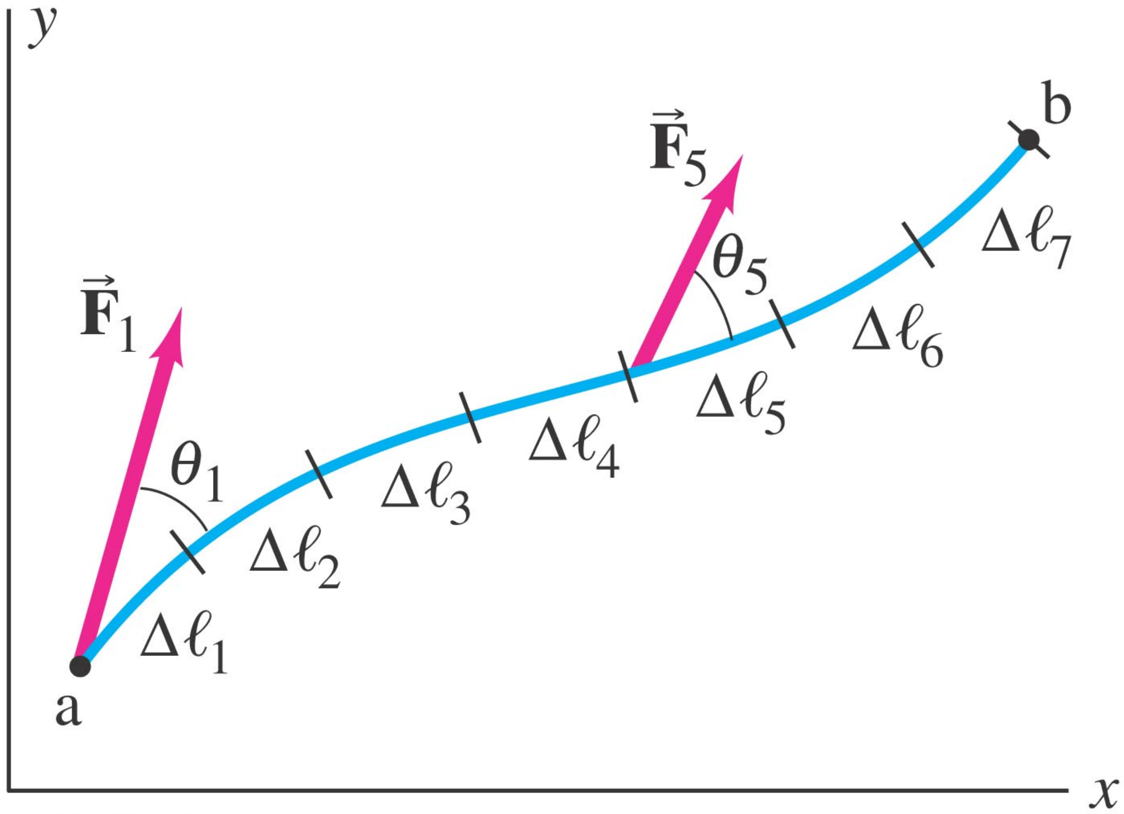
Jos voiman suunta tai suuruus muuttuu

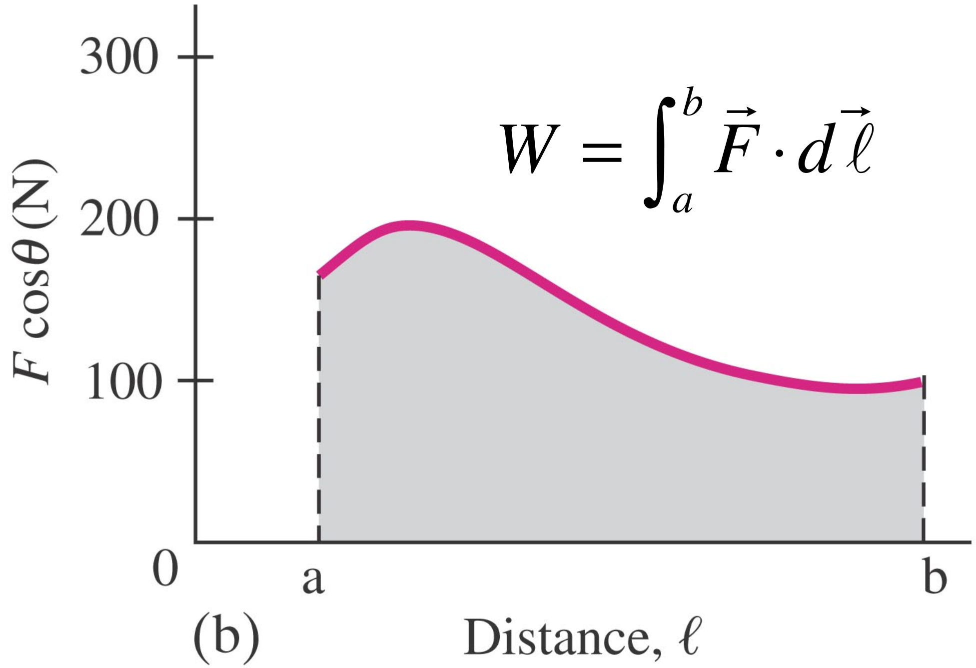
$$W \neq \vec{F} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i$$

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta\ell_i \cos\theta_i$$



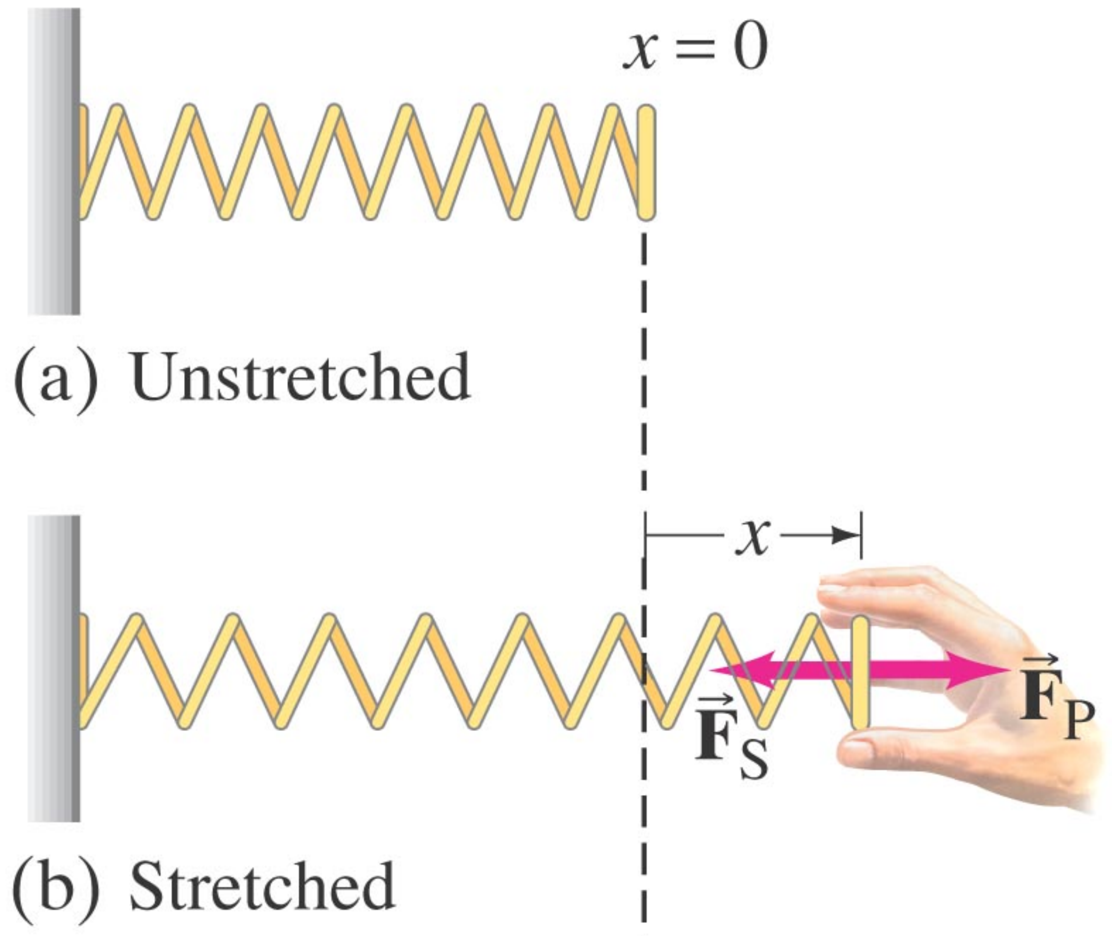




$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Esimerkki 7-5: Jousivoiman tekemä työ

Henkilö venyttää jousta 3.0 cm käyttäen suurimmillaan 75 N voimaa. Kuinka suuren työn henkilö tekee jouseen?



Esimerkki 7-6:

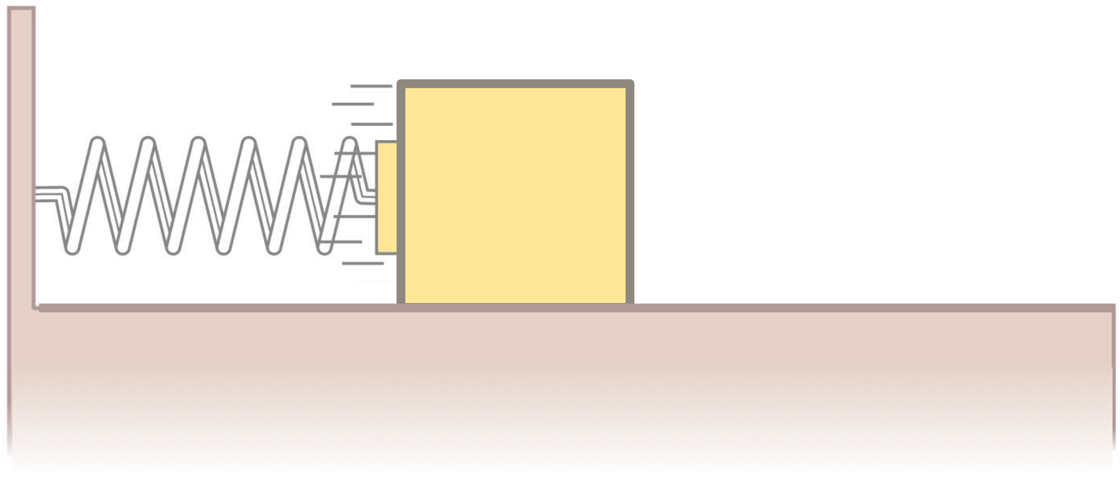
Valvontakameran paikkaa hallitaan robottikäden avulla.

Kameran liikuttamiseen tarvittava voima on

$$F(x) = F_o\left(1 + \frac{x^2}{6x_o^2}\right)$$

Kun kameraa liikutetaan paikasta 0,010 m paikkaan 0,050 m, kuinka suuri työ tehdään?

Esimerkki



Jousi puristetaan kappaleen avulla lepopituudestaan 25 cm lyhyemmäksi. Kun kappale vapautetaan, se lähtee liukumaan vaakasuoralla alustalla. Määritä, kuinka suuri työ kappaleeseen tehdään sen liikkuessa alkupisteestä jousen lepopituuteen. Alustan ja kappaleen välinen kitkakerroin on 0,20, kappaleen massa 1,5kg ja jousivakio 60,0 N/m.

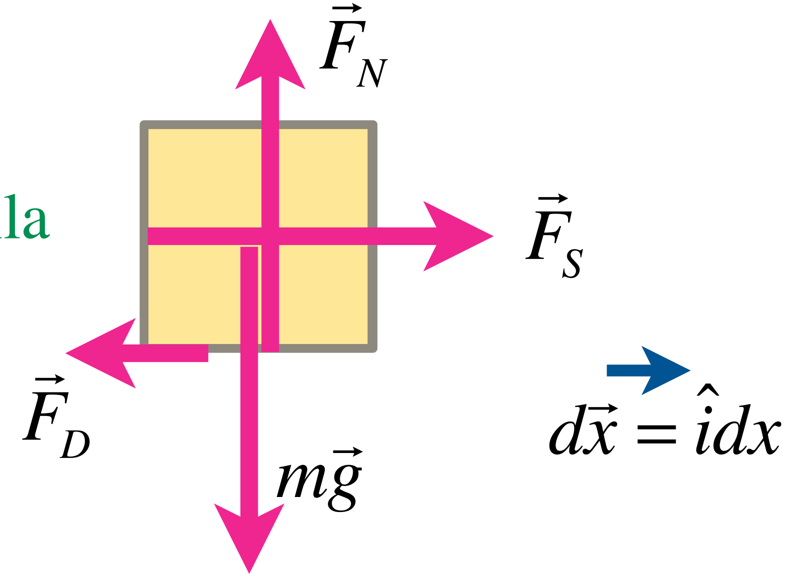
Esimerkki

Hahmotetaan kappaleeseen vaikuttavat voimat voimakuvion avulla. Newtonin II lain perusteella

$$\vec{F}_D + \vec{F}_S + \vec{F}_N + m\vec{g} = m\vec{a}$$

pystysuunnassa $F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$

Kitkavoima $F_D = \mu F_N \Rightarrow F_D = \mu mg$



Jousi puristetaan kappaleen avulla lepopituudestaan 25 cm lyhyemmäksi. Kun kappale vapautetaan, se lähtee liukumaan vaakasuoralla alustalla. Määritä, kuinka suuri työ kappaleeseen tehdään sen liikkuessa alkupisteestä jousen lepopituuteen. Alustan ja kappaleen välinen kitkakerroin on 0,20, kappaleen massa 1,5kg ja jousivakio 60,0 N/m.

Kitkavoiman tekemä työ, kun alkupiste on -ℓ ja loppupiste 0

$$W_D = \int_{-\ell}^{0} \vec{F}_D \cdot d\vec{x} = \int_{-\ell}^{0} -F_D\hat{i} \cdot \hat{i}\, dx$$

$$W_D = -\int_{-\ell}^{0} \mu mg\, dx = -\mu mg\ell$$

Jousivoiman $\vec{F}_S = -kx\hat{i}$ tekemä työ

$$W_S = \int_{-\ell}^{0} \vec{F}_S \cdot \hat{i}\, dx = -\int_{-\ell}^{0} kx\, dx = \tfrac{1}{2}k\ell^2$$

Kappaleeseen tehty kokonaistyö

$$W_{kok} = W_D + W_S = -\mu mg\ell + \tfrac{1}{2}k\ell^2$$

$$W_{kok} = -0{,}735\ \mathrm{J} + 1{,}875\ \mathrm{J} = 1{,}1\ \mathrm{J}$$

Esimerkki

Pudotetaan lentopallo stadionin tornista (h=72 m). Määritä palloon putoamisen aikana tehty työ. Pallon massa on 270 g ja pallon havaittiin osuvan maahan vakionopeudella 16 m/s.

Esimerkki

Pudotetaan lentopallo stadionin tornista (h=72 m). Määritä palloon putoamisen aikana tehty työ. Pallon massa on 270 g ja pallon havaittiin osuvan maahan vakionopeudella 16 m/s.

Newtonin II lain mukaan pallon painon ja ilmanvastuksen $F_D = bv^2$ erotus aiheuttaa kiihtyvyyden a: $mg - F_D = ma$ Koska $a = dv/dt$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2$$

Saatiin differentiaaliyhtälö, joka pitää ratkaista

Pallo osuu maahan vakionopeudella, joten se on saavuttanut rajanopeutensa.
Rajanopeuden avulla saadaan $mg - bv_T^2 = 0 \Rightarrow b = mg / v_T^2$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - mg\frac{v^2}{v_T^2}$$

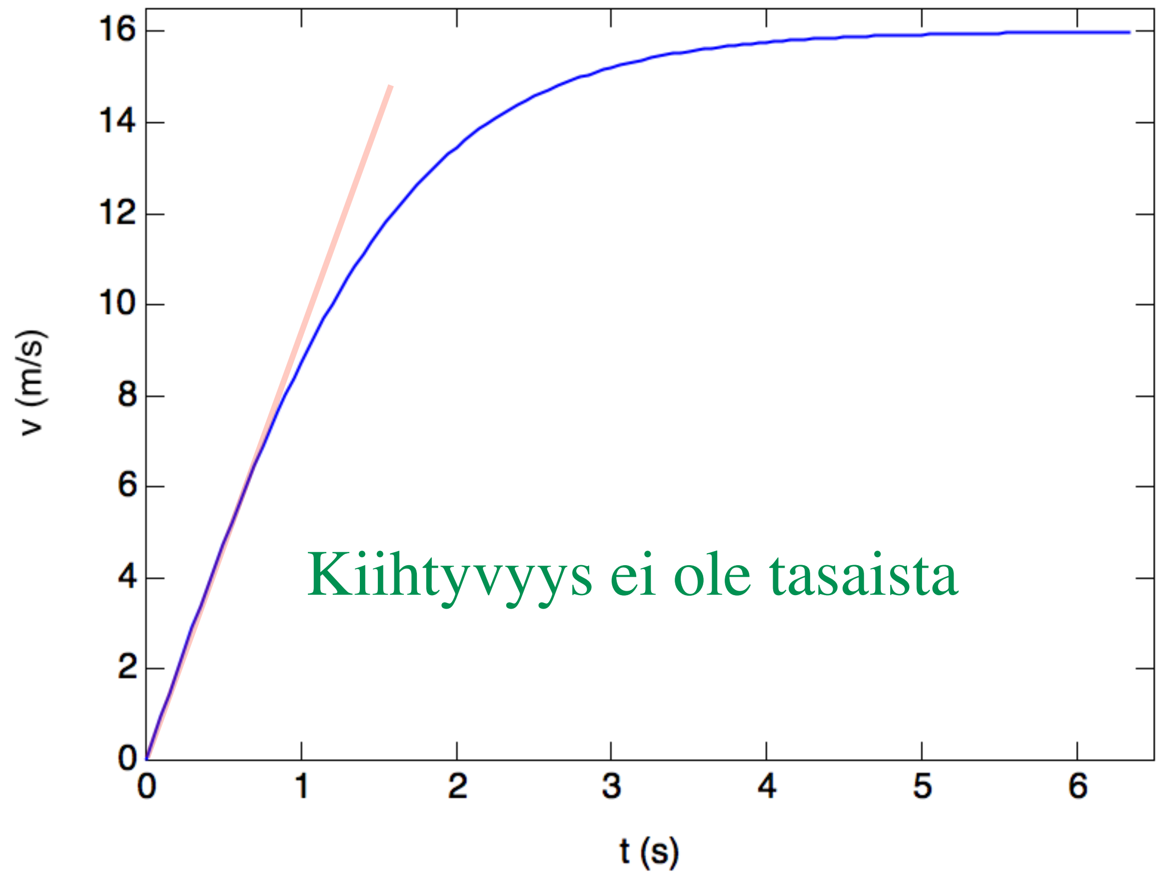
Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $\dfrac{dv}{dt} = g\left[1 - \dfrac{v(t)^2}{v_T^2}\right]$

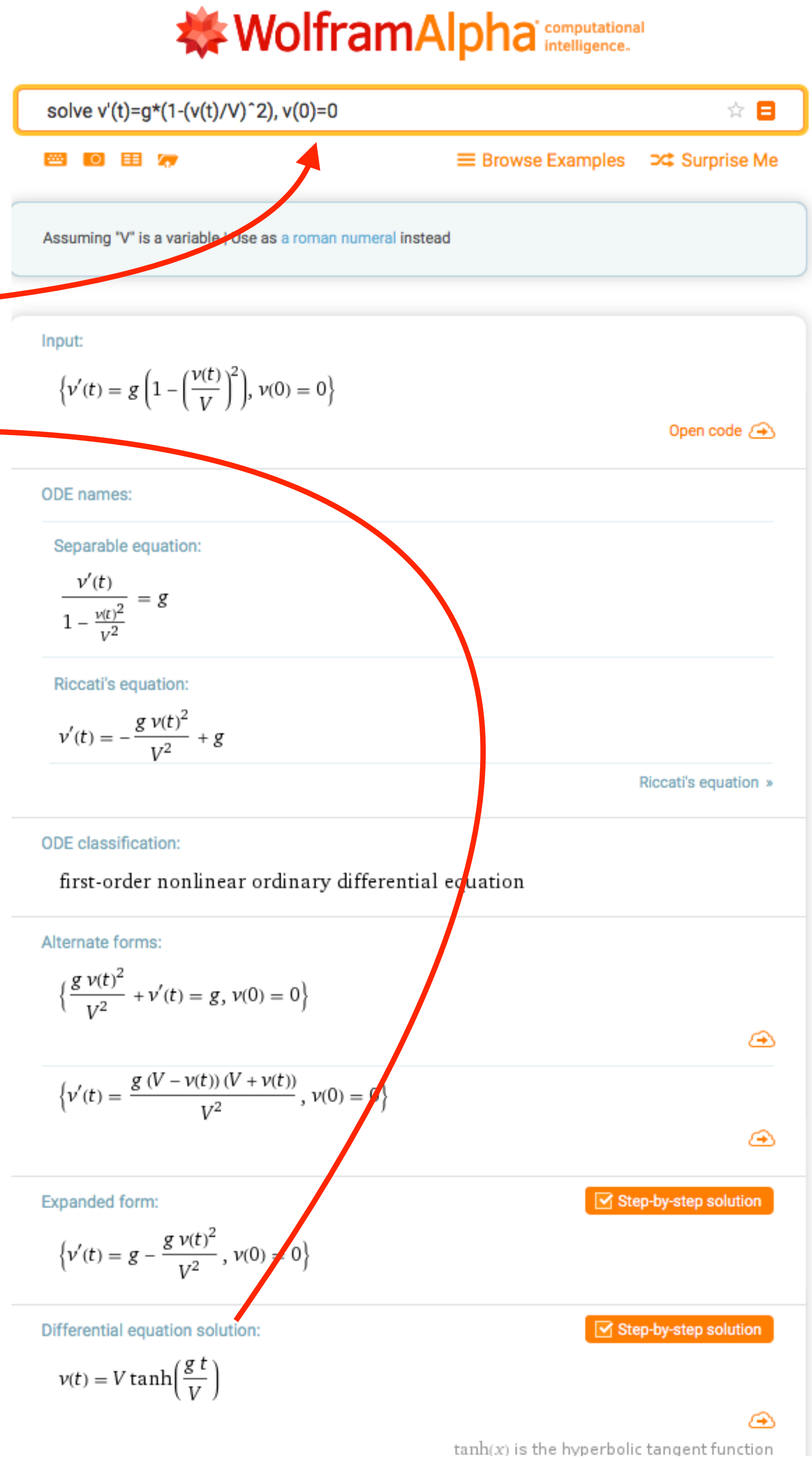
käyttämällä WolframAlphaa http://www.wolframalpha.com

Käytetään hyväksi tietoa, jonka voi päätellä tehtävästä, eli, että nopeus hetkellä $t=0$ on nolla, eli $v(0)=0$

Ratkaisu

$$v(t) = v_T \tanh\left(\frac{gt}{v_T}\right)$$

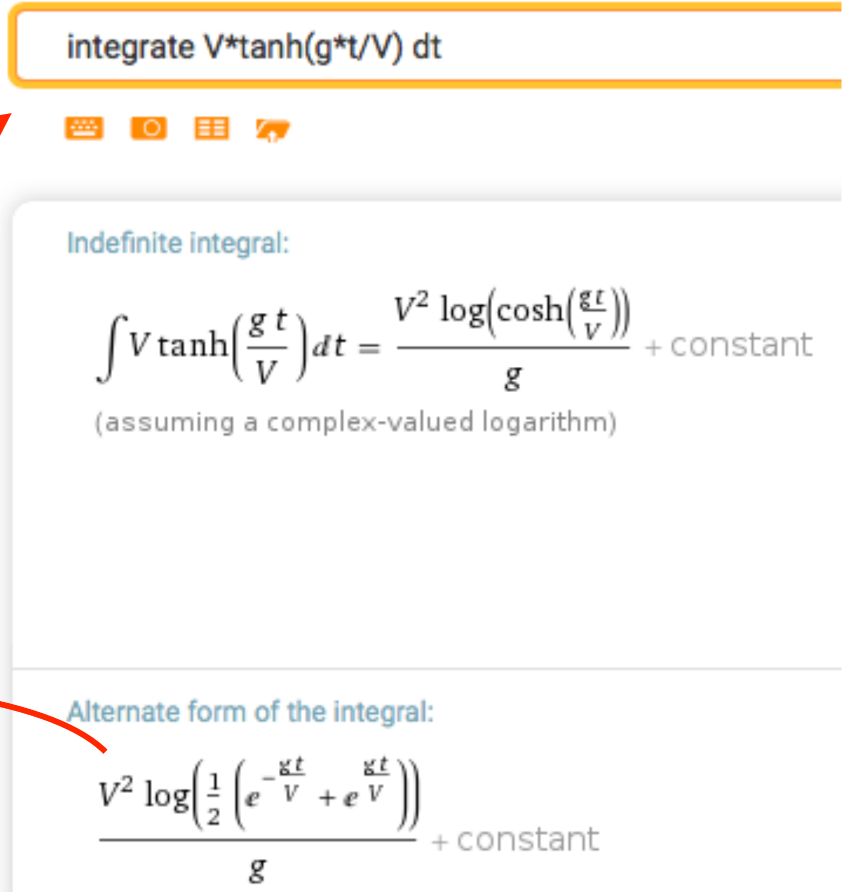




Ratkaistaan seuraavaksi paikka ajan funktiona

$$v = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow dy = v(t)dt$$

$$\int dy = \int v(t)dt = \int v_T \tanh\left(\frac{gt}{v_T}\right)dt$$



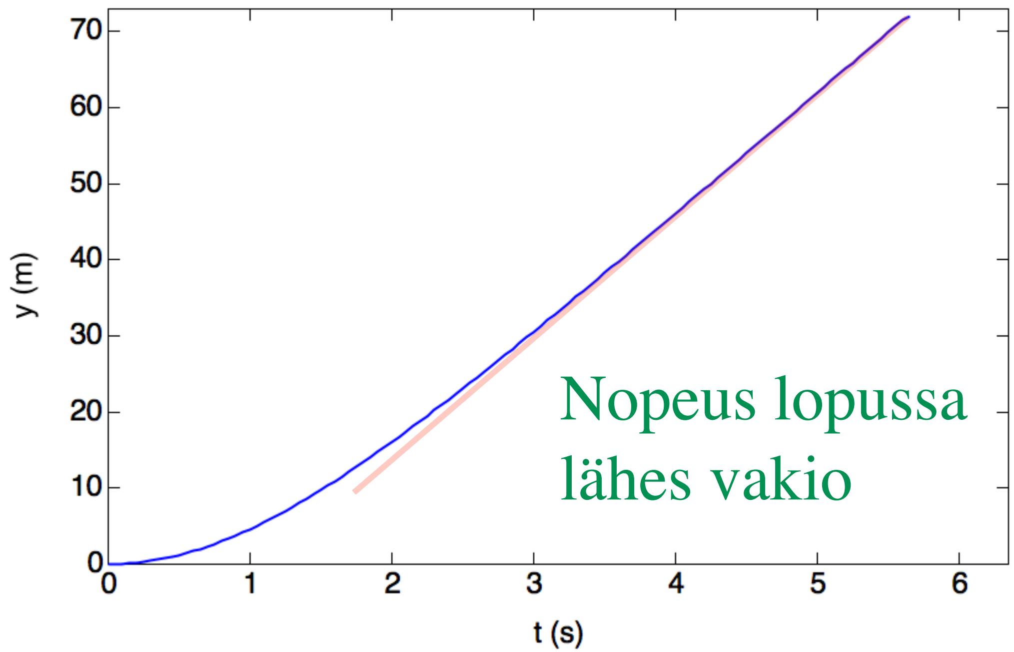
$$y(t) = \frac{v_T^2}{g}\ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{gt}{v_T}} + e^{\frac{gt}{v_T}}\right)\right] + C$$

Valitaan koordinaatisto siten, että *y(0)=0*

$$y(0) = \frac{v_T^2}{g}\ln\left[\frac{1}{2}(1+1)\right] + C = 0$$

$$\frac{v_T^2}{g}\ln(1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

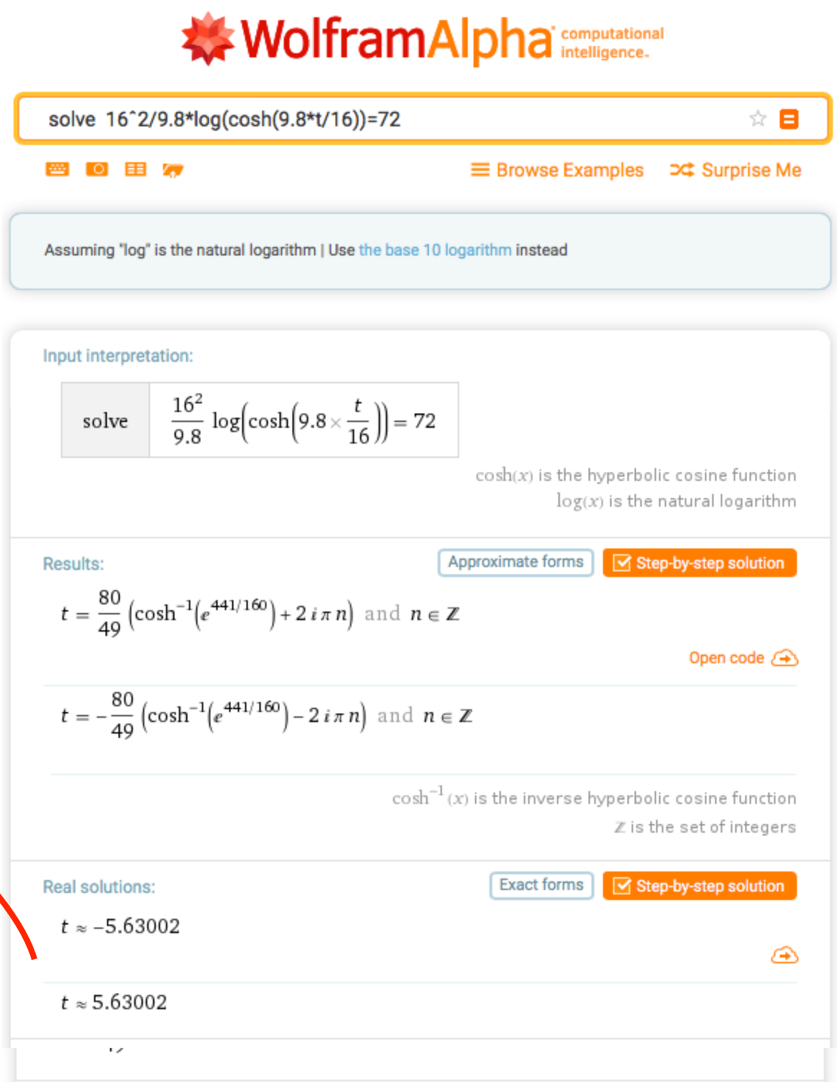
$$y(t) = \frac{v_T^2}{g}\ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{gt}{v_T}} + e^{\frac{gt}{v_T}}\right)\right]$$



Tarvitaan vielä putoamisaika, eli ratkaistaan, millä hetkellä t

$$y(t) = \frac{v_T^2}{g} \ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{gt}{v_T}} + e^{\frac{gt}{v_T}}\right)\right] = 72 \text{ m}$$

$$t = 5{,}63 \text{ s}$$



Nopeus $v(t) = v_T \tanh\left(\frac{gt}{v_T}\right)$

Ilman vastus $F_D = \frac{mg}{v_T^2} v^2 = mg\left[\tanh\left(\frac{gt}{v_T}\right)\right]^2$

Ilmanvastuksen tekemä työ

$$dy = v(t)dt$$

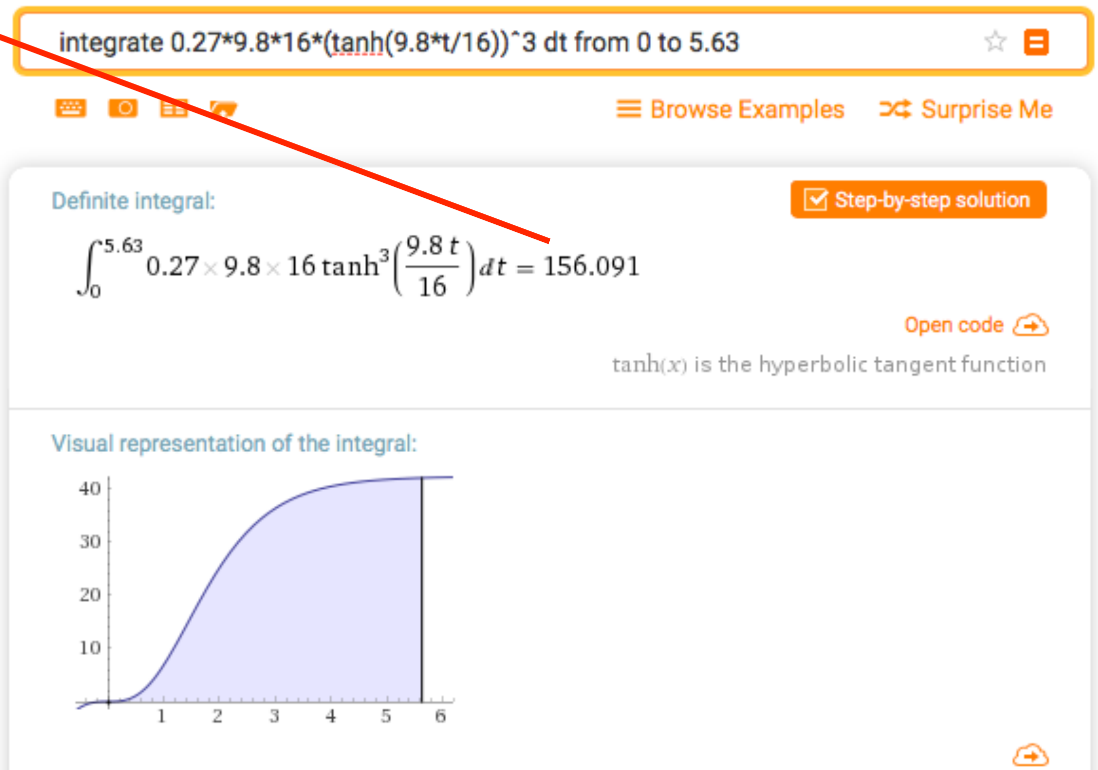
$$W_D = -\int_0^h F_D\, dy = -\int_0^t F_D(t) v\, dt$$

$$= -\int_0^t \frac{mg}{v_T^2} v^2(t) v(t) dt = -\frac{mg}{v_T^2}\int_0^t v_T^3 \tanh^3\left(\frac{gt}{v_T}\right)dt = -mgv_T \int_0^t \tanh^3\left(\frac{gt}{v_T}\right)dt$$

$$W_D = -156 \text{ J}$$

Putoamisaika

$t = 5{,}63$ s



Painovoiman tekemä työ

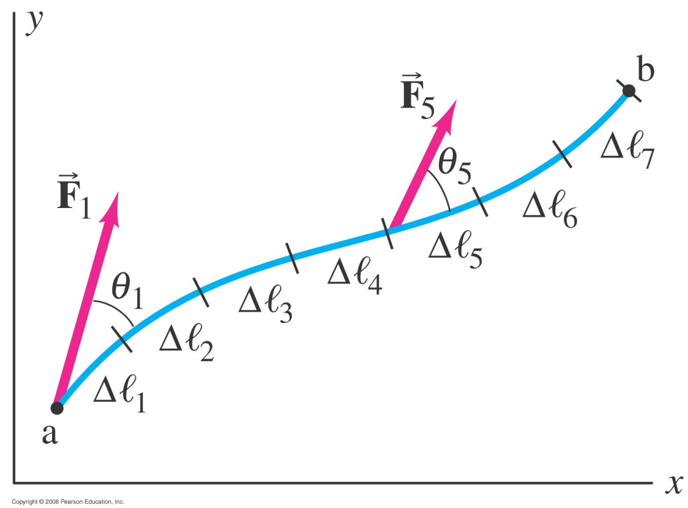
$$W_G = \int_0^h mg\, dy = mgh$$

$$W_G = 190 \text{ J}$$

Palloon tehty työ

$W = -156$ J $+ 190$ J $= 34$ J

7.4 Työpeeriaate ja liike-energia



Työperiaate: kappaleeseen tehty kokonaistyö on yhtä suuri kuin sen liike-energian muutos

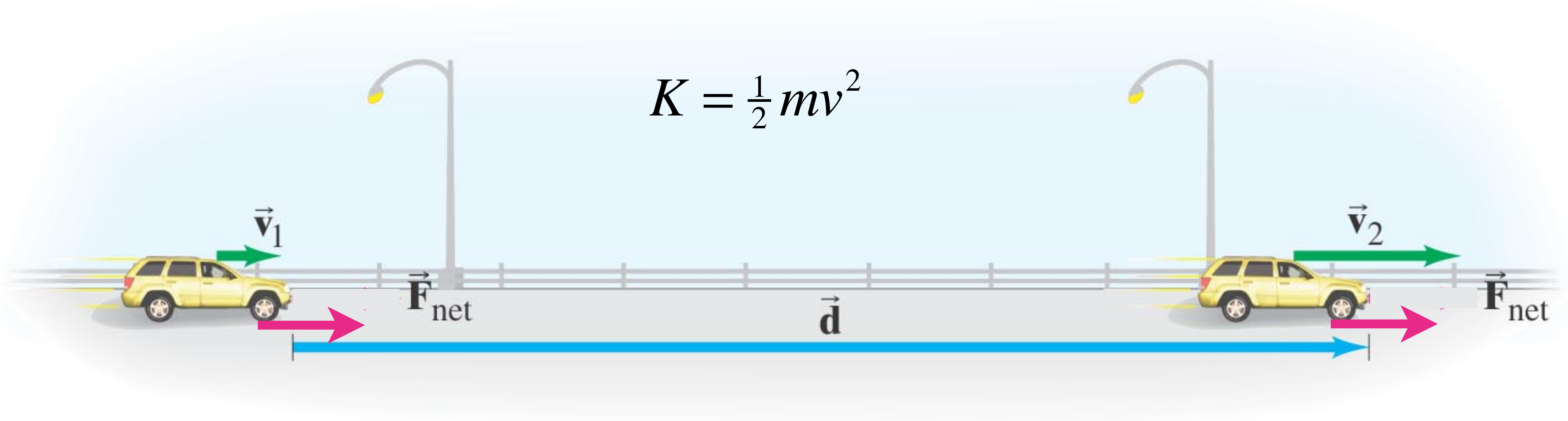
$$W = \Delta K$$

$$W = \int_a^l \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Delta K = K_l - K_a$$

$$\Delta K = \tfrac{1}{2} m v_l^2 - \tfrac{1}{2} m v_a^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2$$



Esimerkki 7-7:

Pesäpalloa heitetään siten, että se saavuttaa nopeuden 25 m/s.
Määritä pallon liike-energia.
Määritä kuinka suuri nettotyö palloon tehdään, jos se lähtee levosta liikeelle.
Pallon massa on 145 g.

Esimerkki

Pudotetaan lentopallo stadionin tornista (h=72 m). Määritä palloon putoamisen aikana tehty työ. Pallon massa on 270 g ja pallon havaittiin osuvan maahan vakionopeudella 16 m/s.

Työperiaatteen mukaan $\Delta K = W$

Koska $\Delta K = \frac{1}{2} m v_l^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} m v_l^2$

Työ on $W = \frac{1}{2} m v_l^2 = 34 \text{ J}$

Esimerkki 7-10:

Määritä, kuinka suuri työ tarvitaan puristamaan jousi, jonka jousivakio on 360 N/m, 11 cm lepopituuttaan lyhyemmäksi? Puristetun jousen eteen tuodaan 1,85 kg:n kappale, joka pääsee liukumaan kitkatta vaakasuoralla alustalla. Määritä kappaleen nopeus sen irrotessa jousesta.