Luku 8

Mekaanisen energian säilyminen

Konservatiiviset ja ei-konservatiiviset voimat

Potentiaalienergia

Voima ja potentiaalienergia

Mekaanisen energian säilyminen

Teho

Tavoitteet:

- Erottaa konservatiivinen ja ei-konservatiivinen voima
- Kuvailla potentiaalienergian käsitettä ja määrittää potentiaalienergia
- Tunnistaa tilanteita, jossa mekaanisen energian säilymislaki on voimassa ja käyttää mekaanisen energian säilymistä tehtävien ratkaisemisessa
- Kuvailla voiman ja potentiaalienergian välistä yhteyttä

Esitiedot

- Selkeä kuva voimista
- Työn käsite
- Kineettisen energian käsite

8-1 Konservatiiviset ja ei-konservatiiviset voimat

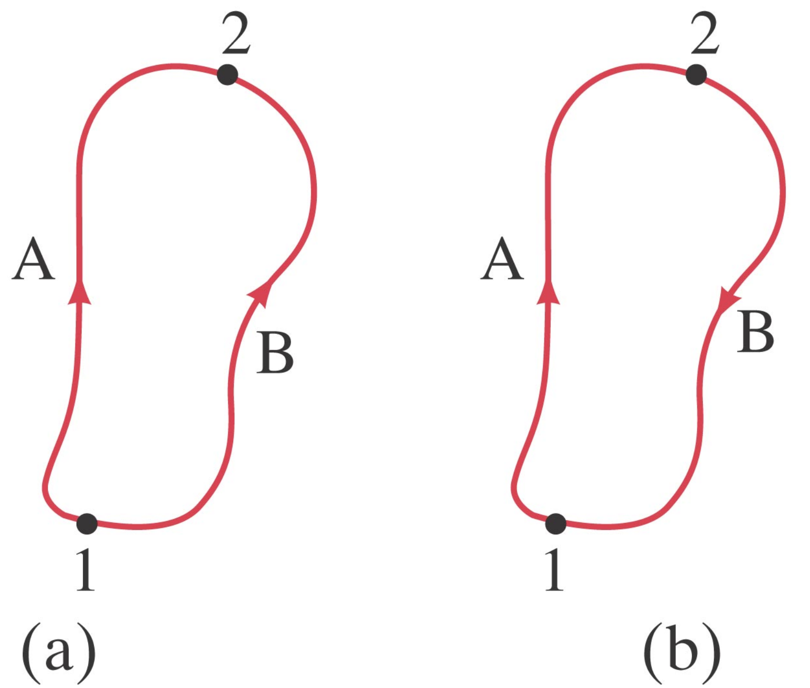
Kun voiman tekemä työ kappaleen liikkuessa mielivaltaisen suljetun polun ympäri on nolla, voima on konservatiivinen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Kaikki loput voimat ovat ei-konservatiivisia

Konservatiivisen voiman tekemä työ ei riipu kuljetusta reitistä, vaan ainoastaan reitin alku- ja loppupisteestä.

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$



Esimerkki: Tiiliskiven nostaminen

Nostetaan tiiliskivi lattialta pöydälle tasaisella nopeudella. Määritä jokaisen tiiliskiveen kohdistuvan voiman tekemä työ.

Painovoima $\vec{F}_G = m\vec{g}$

Tukivoima $\vec{F}_{ext}$

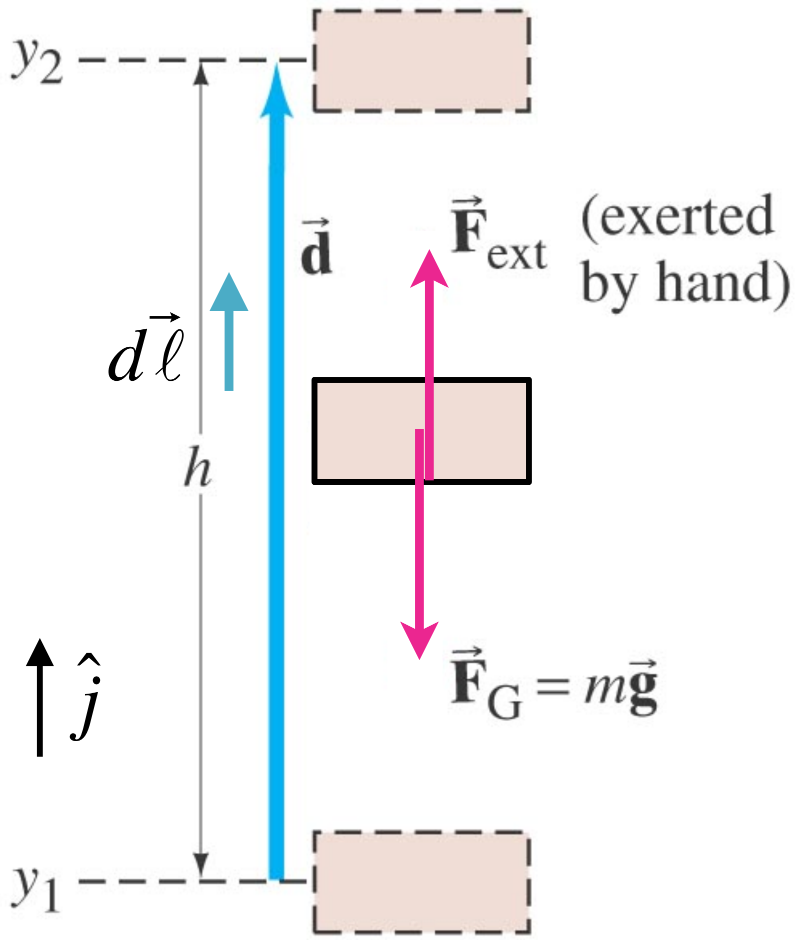
$$W_G = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_G \cdot d\vec{\ell} = \int_{y_1}^{y_2} -mg\hat{j} \cdot d\ell\hat{j} = -mg\left(y_2 - y_1\right)$$

Newtonin II lain perusteella

$$\vec{F}_G + \vec{F}_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \vec{F}_{ext} = -m\vec{g}$$

Tukivoiman tekemä työ

$$W_{ext} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = \int_{y_1}^{y_2} mg\hat{j} \cdot d\ell\hat{j} = mgh$$



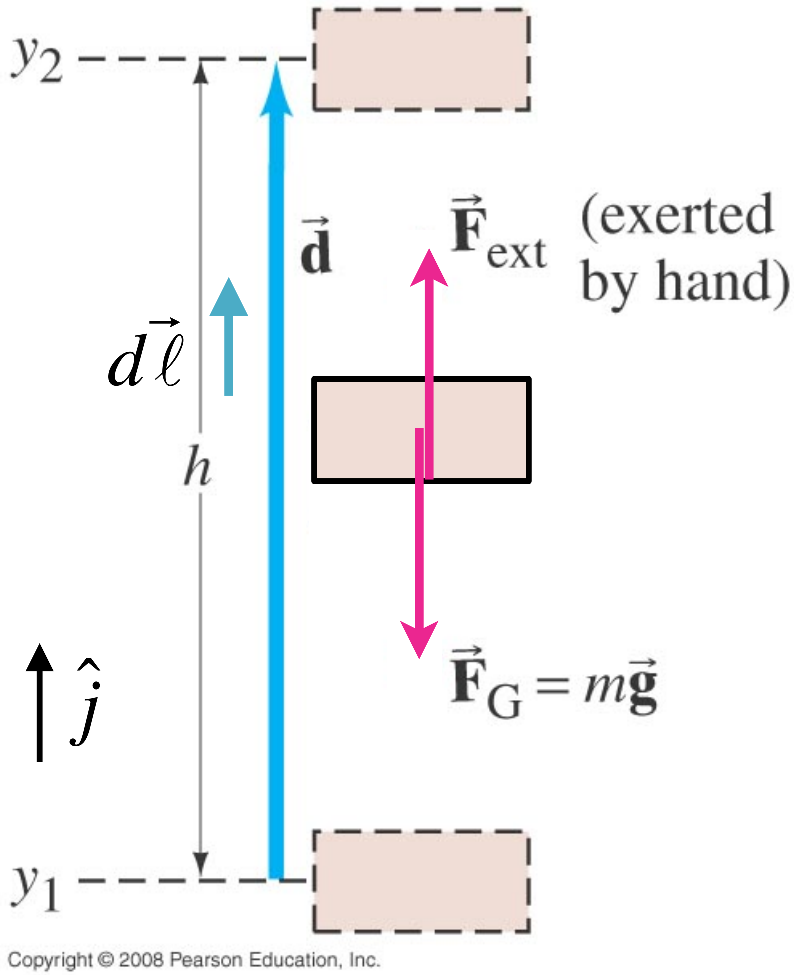
8-2 Potentiaalienergia

Tiiliskiven tapauksessa painovoiman tekemä työ $W_G = -mgh$

Painovoiman kyky tehdä työtä kiveen on kasvanut määrällä mgh. Tämä on kiven potentiaalienergian muutos painovoimakentässä.

Konservatiiviseen voimaan voidaan liittää potentiaalienergia. Potentiaalienergian muutos välillä 1->2 on

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -W$$



Potentiaalienergian muutokset ovat olennaisia – ei sen absoluuttiarvo. Nollatason voi valita vapaasti.

$$U_G = mgh$$

Ei-konservatiivisille voimille ei voi määritellä potentiaalienergiaa.

Jousen potentiaalienergia

Jousta puristava voima $\vec{F}_p = kx\hat{i}$

Jousivoima $\vec{F}_S = -kx\hat{i}$

Jousivoiman tekemä työ puristettaessa

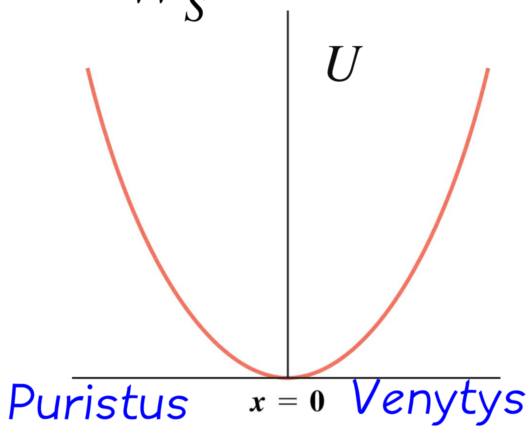
$$W_S = \int_1^2 \vec{F}_S \cdot d\vec{\ell} = \int_0^x -kx\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

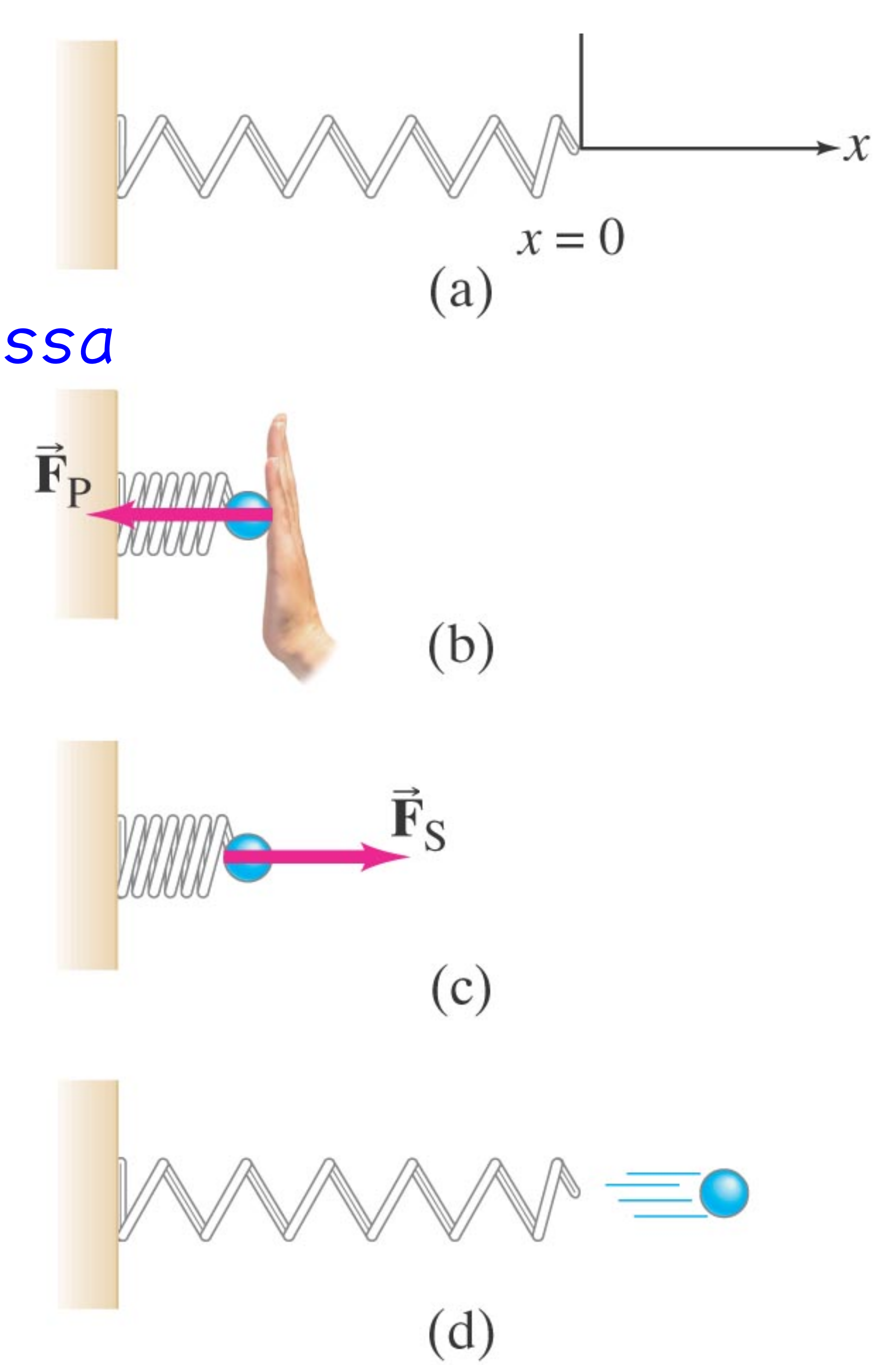
$$= -\int_0^x kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$

Potentiaalienergian muutos puristettaessa $\Delta U = -W_S$

Elastisen kentän potentiaalienergia

$$U_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

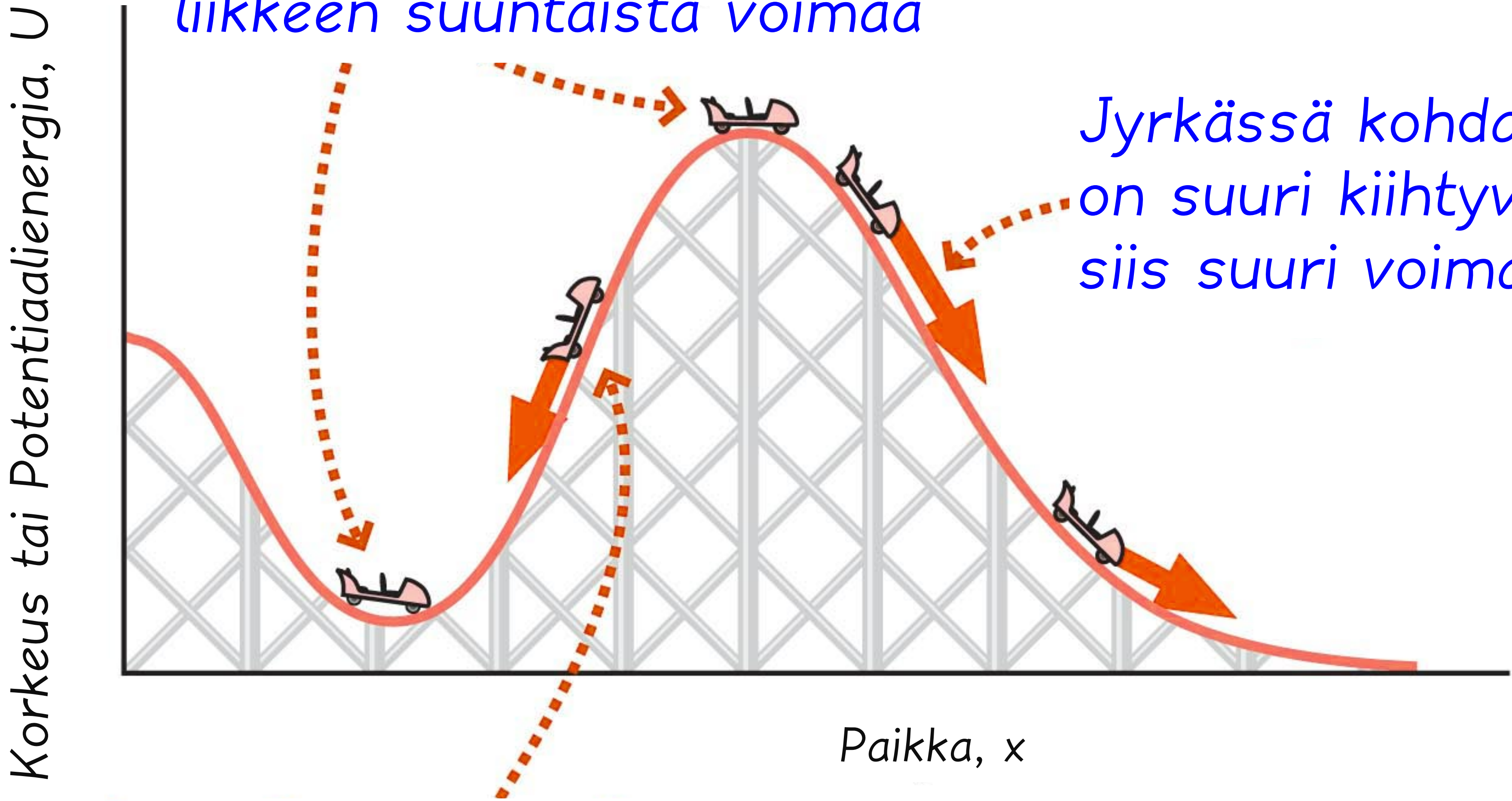




Potentiaalienergiasta voimaan

Pohjalla ja huipuilla ei ole
liikkeen suuntaista voimaa

Jyrkässä kohdassa
on suuri kiihtyvyys,
siis suuri voima



Kun käyrä nousee oikealle,
voima osoittaa vasemmalle

Voima ja potentiaalienergia

Potentiaalienergia $$U(x) = -\int F(x)\,dx + C$$

Tästä voidaan ratkaista voima työn avulla
pienen siirtymän rajalla yksiulotteisessa tapauksessa

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$$

ja yleisesti

$$\vec{F}(x,y,z) = -\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}U - \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}U - \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}U$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\nabla = -\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

8-3 Mekaanisen energian säilyminen

Työperiaate $$W_{\text{net}} = \Delta K$$

Yleisesti työ $$W_{\text{net}} = W_{\text{c}} + W_{\text{nc}}$$

- konservatiivisten voimien tekemä työ W_{c}
- ei-konservatiivisten voimien tekemä työ W_{nc}

Koska W_{c} = -ΔU => $$\Delta K + \Delta U = W_{\text{nc}}$$

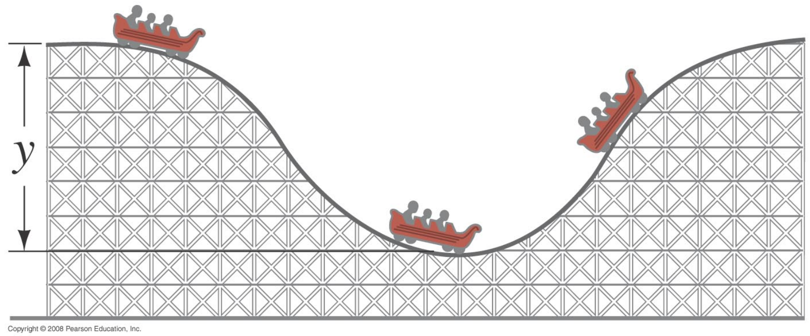
Määritellään mekaaninen energia liike- ja potentiaalienergian summaksi =>

Jos systeemissä on vain konservatiivisia voimia, systeemin mekaaninen energia säilyy.

$$K + U = \text{vakio}$$

Esimerkki 8.4

Vuoristoradan vaunu lähtee paikaltaan radan korkeimmalta kohdalta ($y = 40$ m).



a) Määritä sen vauhti radan alimmassa pisteessä.

b) Määritä kuinka korkealla vaunun vauhti on puolet maksimivauhdista.

Esimerkkien ratkaisut löytyvät kurssin oppikirjasta

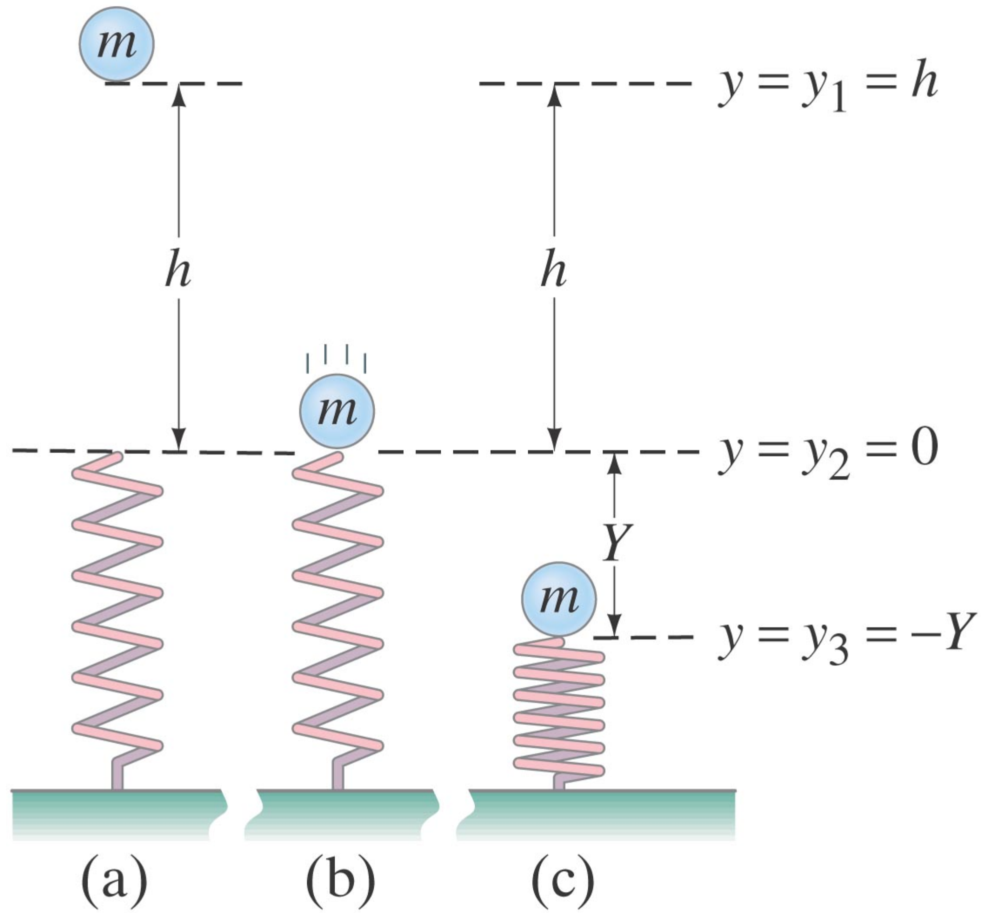
Esimerkki 8.6

Määritä seiväshyppääjän ($m = 70$ kg) tarvitsema vauhti, jotta hän voi ylittää 5m korkeudella olevan riman. Oleta, että hyppääjän massakeskipiste on 0,90 m korkeudella maasta hänen juostessaan.

Esimerkki 8.8

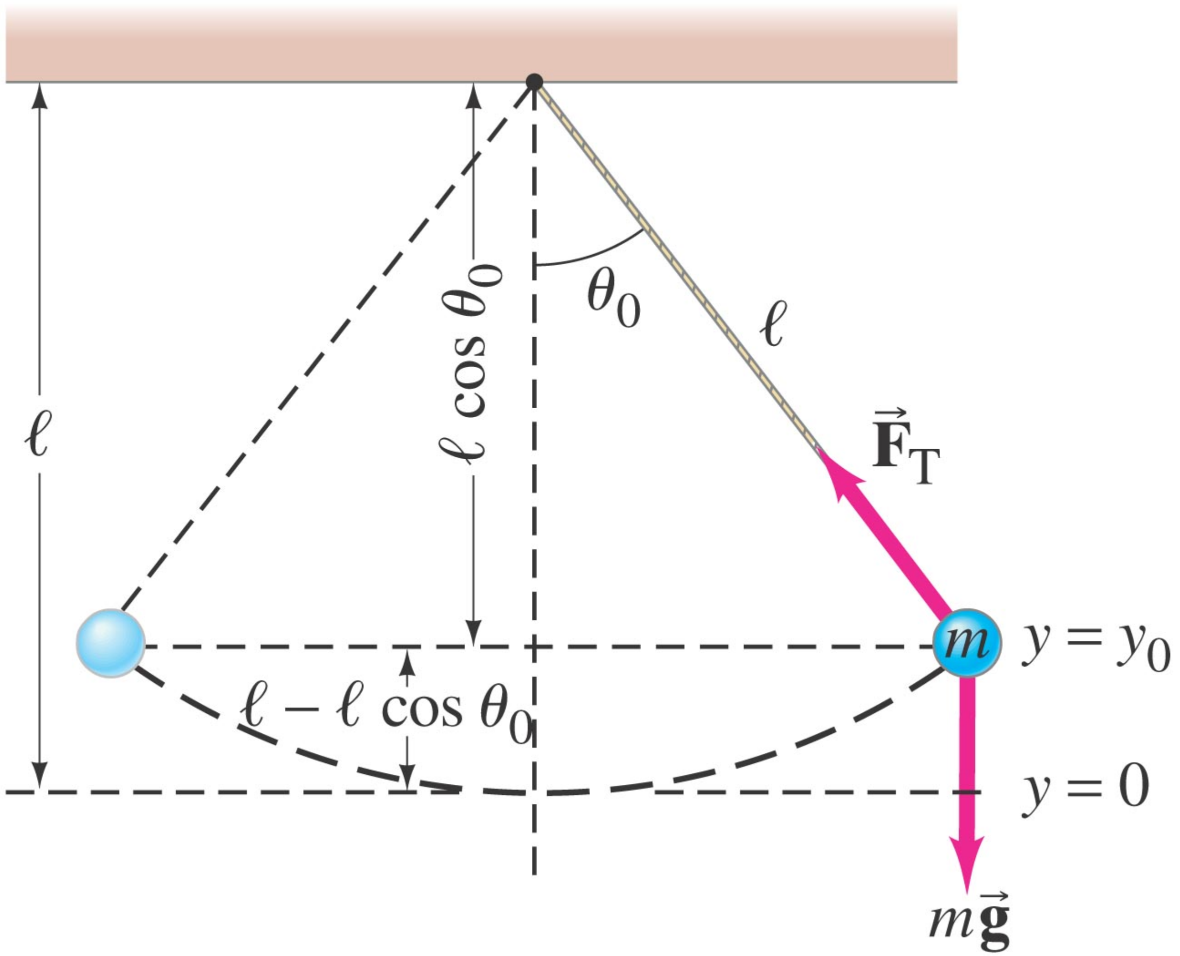
Pallo (m= 2,6 kg) putoaa hyllyltä matkan h = 55 cm pystysuorassa olevan lepopituudessaan olevan jousen päälle. Jousi puristuu matkan Y = 15 cm kasaan.

Määritä jousen jousivakio.

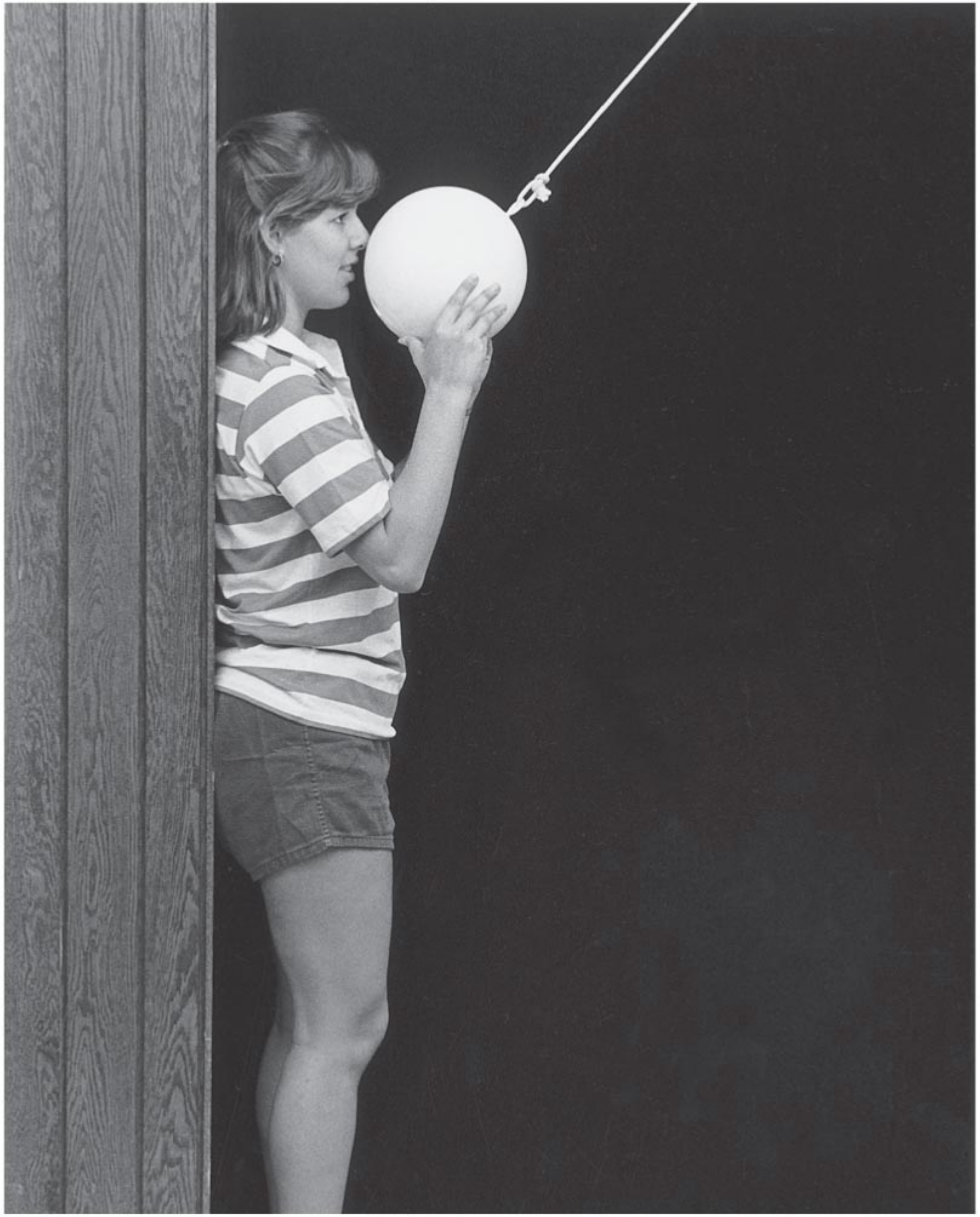


Esimerkki 8.9

Massattomaan naruun kiinnitetty kuula päästetään heilahtamaan, kun narun ja pystysuoran välinen kulma on θ_0. Määritä kuulan vauhti ja narun jännitys heilahduskuman funktiona.



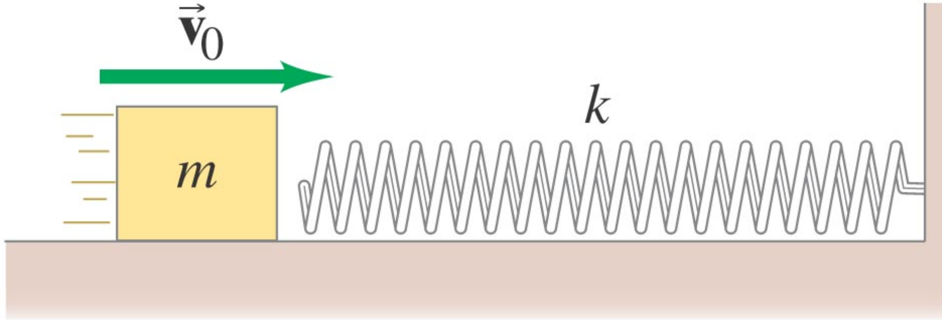
Leikki keilapallolla



https://www.youtube.com/watch?v=xXXF2C-vrQE

Esimerkki 8.11

Kappale, jonka massa on m, osuu liukuessaan vaakasuoralla tasolla jouseen, joka puristuu kasaan. Kappaleen vauhti juuri ennen osumista on v_o, jousen jousivakio k ja jousen puristuma X. Määritä kappaleen ja alustan välinen kitkakerroin.



8-8 Teho

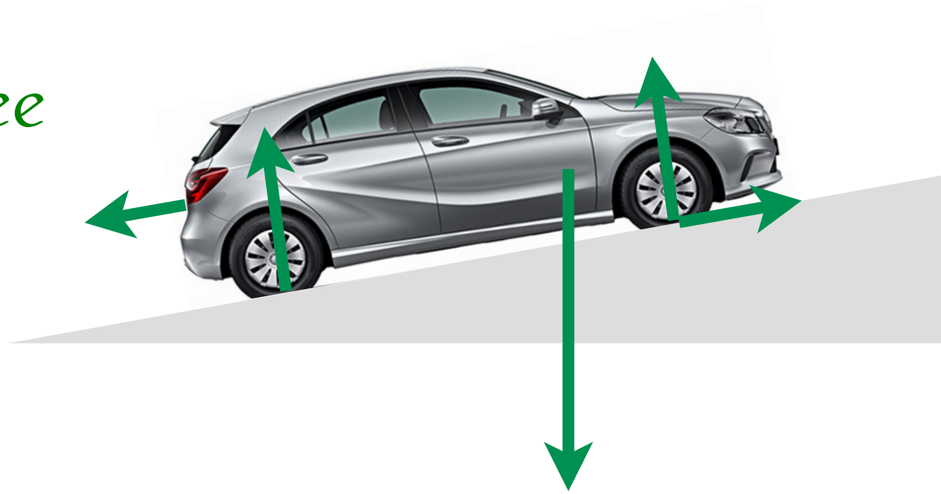
Keskimääräinen teho $\bar{P} = \dfrac{W}{t}$

Hetkellinen teho $P = \dfrac{\delta W}{dt}$ tai $P = \dfrac{dE}{dt}$

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

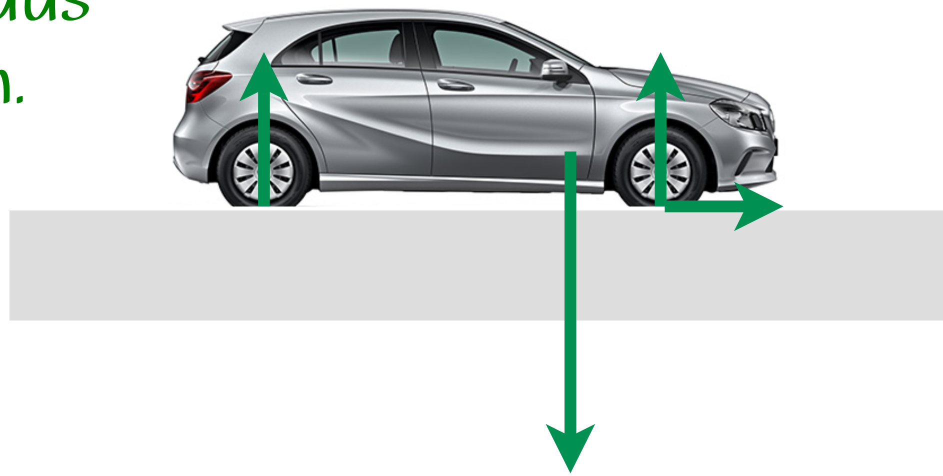
Esimerkki 8.15

Määritä kuinka suuren tehon tarvitsee auto, jonka massa on 1400 kg, seuraavissa tilanteissa. Oleta, että ilmanvastus näissä nopeuksissa on likimain vakio $F_D = 700$ N.



a) Auto nousee mäkeä, jonka kaltevuus on 10°, tasaisella nopeudella 80 km/h.

b) Auto nostaa nopeuttaan vaakasuoralla tiellä 90 km/h:sta 110 km/h:iin.



8-9 Potentiaalienergiakäyrät

Mekaaninen energia

$E = K + U$

Potentiaalienergia paikan funktiona

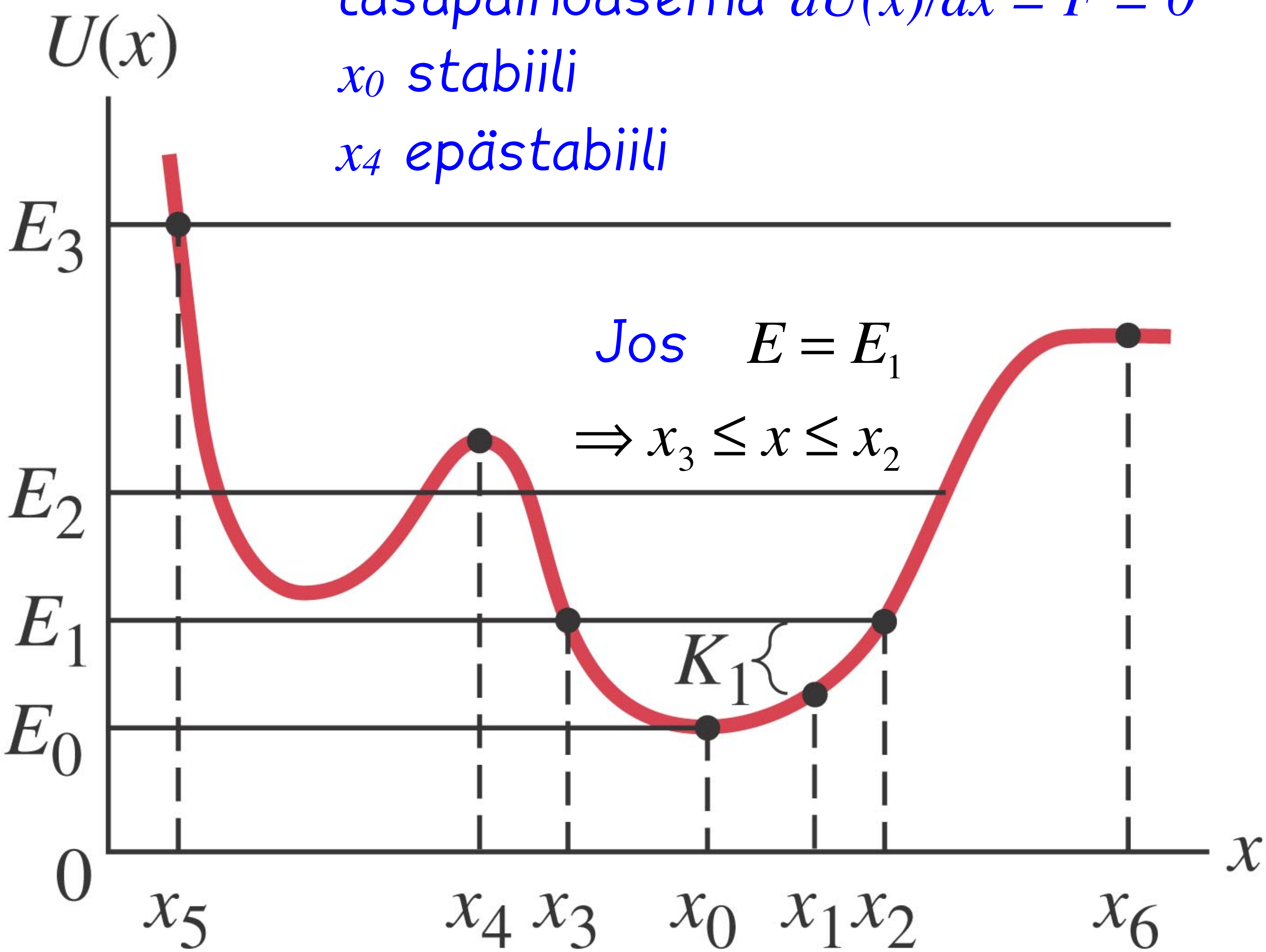
tasapainoasema $dU(x)/dx = F = 0$

x_0 stabiili

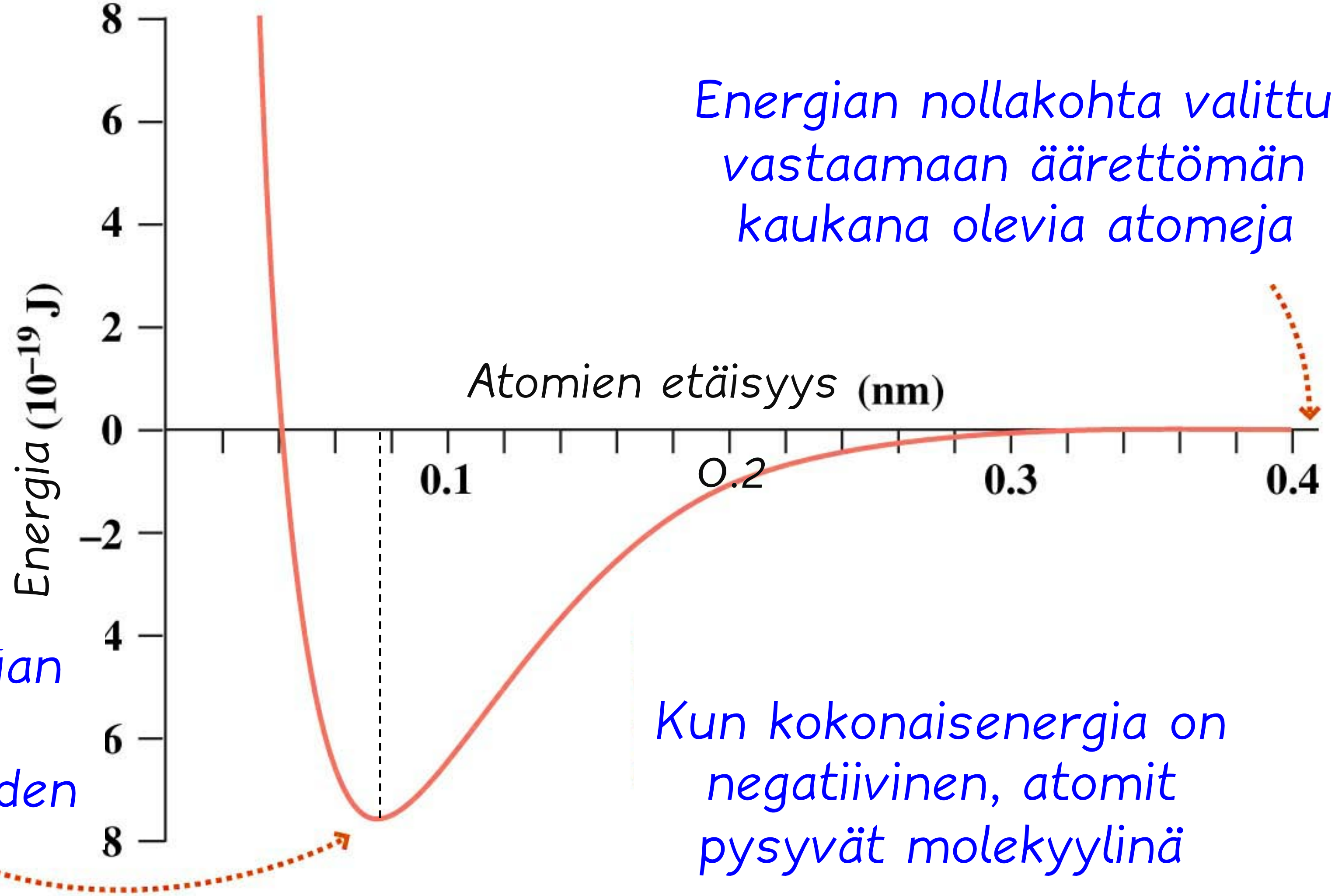
x_4 epästabiili

Kun $E = E_3$, kappale on vapaa ja sen energia riittää liikkumiseen minne vain

Kun $E = E_2$, kappale on loukkuuntunut jompaan kumpaan potentiaalikuopista. Se ei pääse vaihtamaan kuoppaa, koska potentiaalivalli estää.



Vetyatomin potentiaalienergiakäyrä vetymolekyylissä



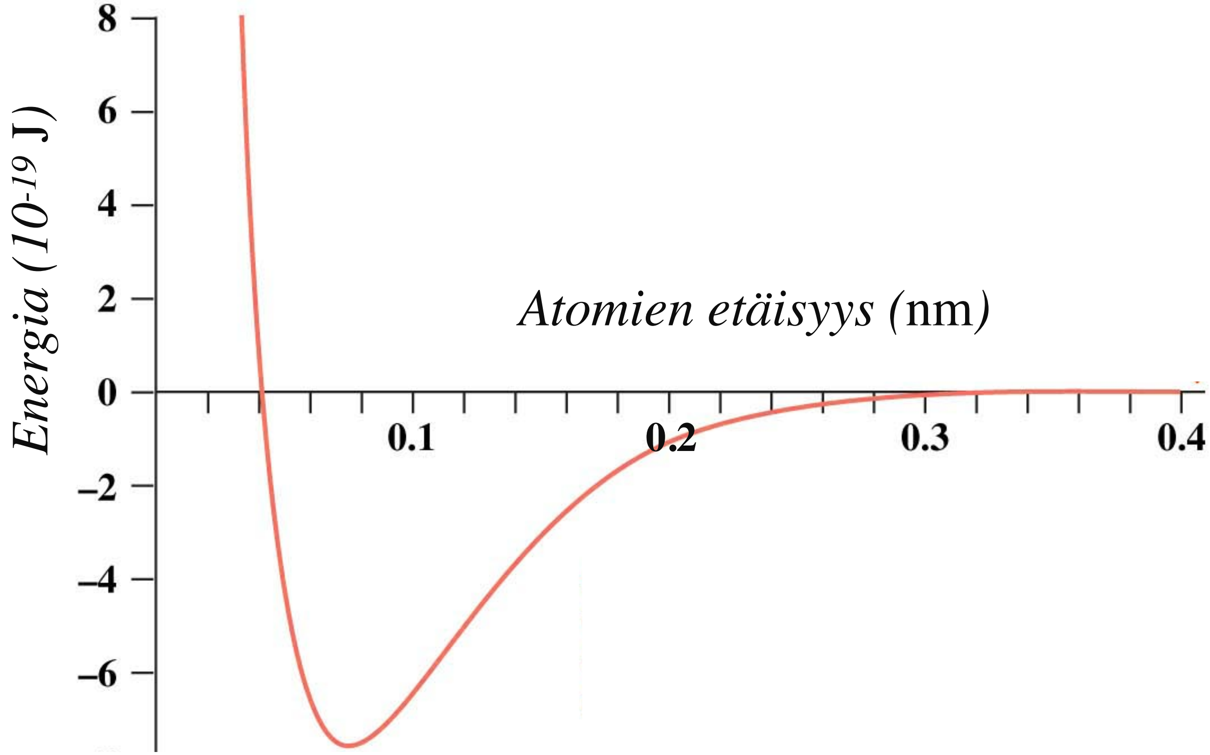
Energian nollakohta valittu vastaamaan äärettömän kaukana olevia atomeja

Potentiaalienergian minimi kertoo tasapainoetäisyyden

Kun kokonaisenergia on negatiivinen, atomit pysyvät molekyylinä

Esimerkki: Vetymolekyyli

Vetyatomin potentiaalienergia vetymolekyylissä on esitetty oheisessa kuvassa. Vetyatomien tasapainoetäisyys vetymolekyylissä on x_o= *0,0741 nm.* Lähellä potentiaalikuopan pohjaa potentiaalienergia on likimain paraabelin $U = U_o + a(x-x_o)^2$ muotoinen, missä U_o= *-0,760 aJ*, a = *286 aJ/nm²*. Määritä, kuinka kauas toisistaan atomit pääsevät, kun kokonaisenergia on 0,717 aJ. Arvioi myös jousivakion suuruus.



Esimerkki: Vetymolekyyli

Piirretään parabeeli $U = U_o + a(x\text{-}x_o)^2$, jolla approksimoidaan potentiaalienergian minimiä

Sidosta voidaan approksimoida kahden pallon välisellä jousella

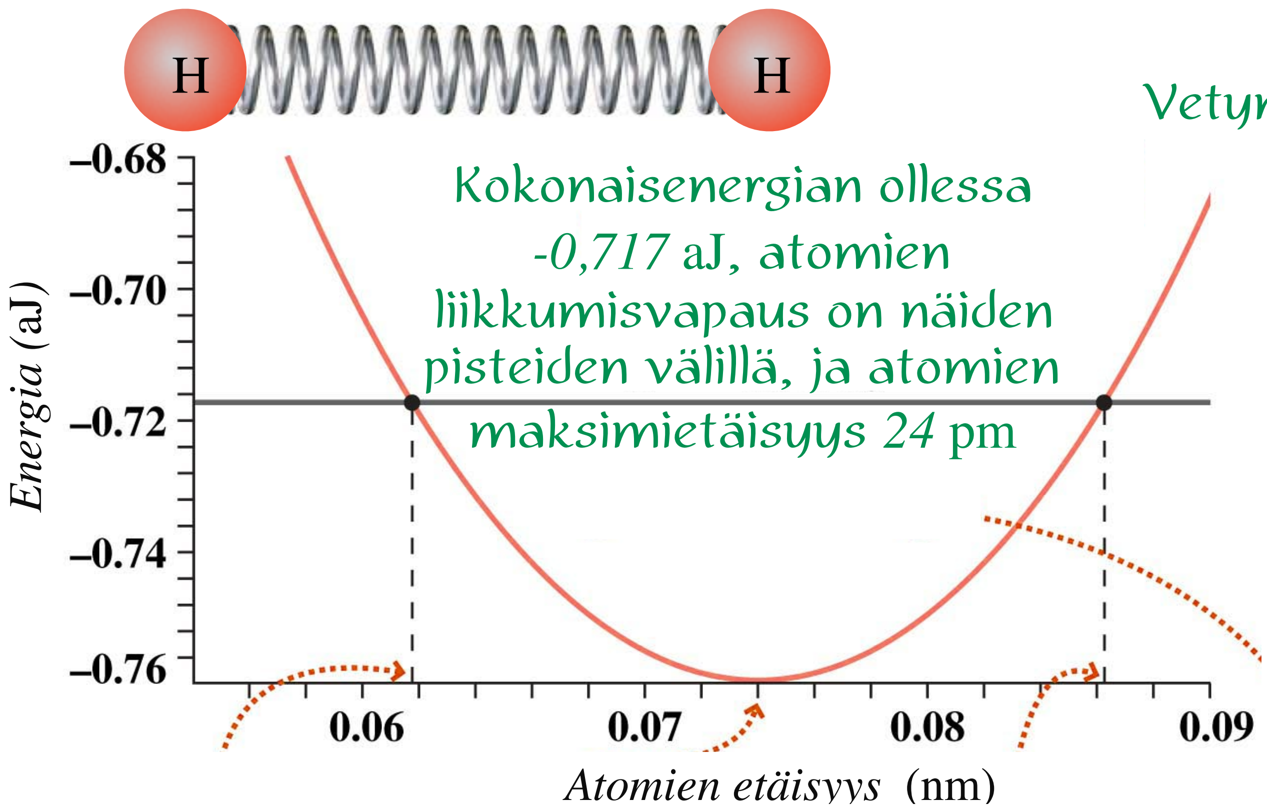
Havaitaan, että sidoksen potentiaalienergia $U = U_o + a(x\text{-}x_o)^2$ on samaa muotoa kuin jousivoiman potentiaalienergia $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Sidosta voidaan approksimoida kahden pallon välisellä jousella

Määritetään poikkeaman suuruus tasapainosta

$$U = U_o + a\left(x - x_o\right)^2 \;\Rightarrow a\left(x - x_o\right)^2 = U - U_o \;\Rightarrow x - x_o = \sqrt{\frac{U - U_o}{a}} = 12\ \mathrm{pm}$$

Koska jousivakio on $$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = \frac{d}{dx}(kx) = k$$



Vetymolekyylin jouselle jousivakio on

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left[U_o + a\left(x - x_o\right)^2\right]$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[2a\left(x - x_o\right)\right] = 2a$$

$$k = 2a$$

$$k = 2 \cdot 286 \frac{10^{-18}\,\mathrm{J}}{\left(10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^2}$$

$$k = 572\ \mathrm{N/m}$$

Ratkaisu