

MS-A0002 Matriisilaskenta

1. Vektorit ja kompleksiluvut

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

1.1 Vektorit

Reaalinen n -ulotteinen avaruus on joukko

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Sen pisteet voidaan mieltää myös (paikka)vektoreiksi, merkitään niitä pystyvektoreina:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

1.1 Vektorit

Määritellään kaksi laskutoimitusta avaruudessa $\mathbb{R}^n$:

- i) yhteenlasku, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- ii) skalaarilla kertominen, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Alkioittain, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \alpha\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Vektori, jonka kaikki alkiot ovat nollia, on *nollavektori*.
Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

1.1 Vektorit

Esimerkki 1

Olkoon

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Laske

1 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$

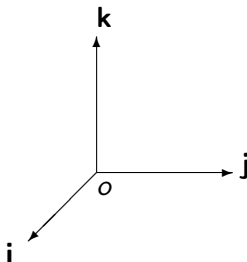
2 $\frac{1}{\pi}\mathbf{y} - \mathbf{x}$

3 $\mathbf{x} + 2\mathbf{z}$

1.1 Vektorit

Koordinaatisto muodostetaan kiinnittämällä origo ja kantavektorit.

Kolmiulotteisessa avaruudessa siis esim. karteesinen koordinaatisto $\{o, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, missä yksikkövektorit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ muodostavat ortonormeeratun positiivisesti suunnistetun kannan.



1.1 Vektorit

Huom!

Tasossa: Jos $\mathbf{a}$ kiertyy $\mathbf{b}$:n päälle vastapäivään lyhintä reittiä, on pari $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ suunnistettu positiivisesti.

Avaruudessa: Jos kolmikko $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ toimii oikean käden säännön $\{P, E, K\}$ mukaisesti, se on positiivisesti suunnistettu.

1.1 Vektorit

Tasossa kantavektorit $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} \hat{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Erityisesti,

$$\mathbf{i} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2

Piirretään tasoon edellisen esimerkin vektorit.

1.1 Vektorit

Avaruudessa kantavektorit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \hat{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Erityisesti,

$$\mathbf{i} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Olkoon $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ avaruuden ortonormeerattu kanta ja

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \hat{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} \hat{=} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 3

Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ *skalaaritulo* (eli sisätulo eli pistetulo) on

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 4

Vektorin $\mathbf{a}$ pituus on

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Esimerkki 5

Lasketaan vektorin $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ pituus.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 6

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{jos } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ 0, & \text{jos } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ tai } \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Seuraus: Vektorit $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ovat kohtisuorassa jos ja vain jos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, merkitään $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Esimerkki 7

Olkoon $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Laske

1 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

2 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

3 $3\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{c} - 3\mathbf{b})$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Vektoritulo voidaan muodostaa vain kolmiulotteisessa avaruudessa.

Määritelmä 8

Olkoot $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ kolmiulotteisia vektoreita. *Vektori- eli ristitulo* on vektori $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jolle pätee:

- 1 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- 2 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$
- 3 vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin

Jos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, on $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Esimerkki 9

Vektorien $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ vektoritulo $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, sillä

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}||\mathbf{j}| \sin \angle(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = 1,$$

$\mathbf{k}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria vastaan, ja $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Vektoritulo **ei** ole

- vaihdannainen: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- liitännäinen: $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, mutta $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Sille kuitenkin pätee

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Kannassa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ vektoritulo saa nasevan muodon: Olkoon

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}.$$

Tällöin voidaan suoralla laskulla osoittaa, että

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{i} + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \mathbf{j} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{k}.$$

Myöhemmin tällä kurssilla opimme determinantin käsitteen ja näemme, että yo. voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Esimerkki 10

Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Laske

1 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

2 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$

3 $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Ratkaisu:

1 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{j} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} =$
 $\mathbf{0} + 2\mathbf{k} - (-\mathbf{k}) + \mathbf{0} = 3\mathbf{k}$

2 $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{i} \times \mathbf{k} + 4\mathbf{j} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -2\mathbf{k} + \mathbf{j} + 2\mathbf{i}$

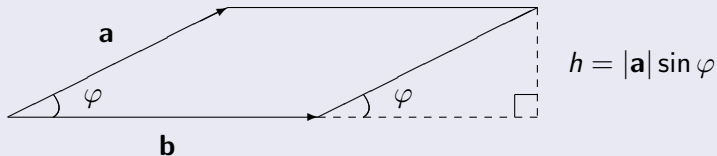
3 $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + \mathbf{i} \times \mathbf{k} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 2\mathbf{k} - \mathbf{j} + \mathbf{i}$

1.2 Skalaari- ja vektoritulo

Lause 11

Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ virittämän suunnikkaan ala on $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

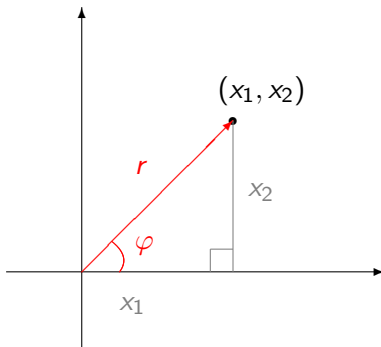
Todistus.



$$\text{Ala} = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$



1.3 Napakoordinaatit



$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{x_2}{x_1}$$

$$x_1 = r \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \varphi$$

1.3 Napakoordinaatit

Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\mathbf{x} = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = r (\cos(\varphi), \sin(\varphi)),$$

missä $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on pisteen etäisyys origosta

ja $\varphi = \arg(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ on $\mathbf{x}$:n *argumentti* eli kulma $\mathbf{x}$:n paikkavektorin ja vaaka-akselin välillä.

Luvut

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| & \in [0, \infty[, \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ovat $\mathbf{x}$:n *napakoordinaatit*.

1.3 Napakoordinaatit

Huom.

- $\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi)$ ja $\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi)$, joten argumentti on monikäsitteinen (kulmaan voi lisätä 2π -monikertoja)!
Usein halutaan, että $\arg(\mathbf{x}) \in [0, 2\pi[$ tai $\arg(\mathbf{x}) \in]-\pi, \pi]$.
- Jos $x_1 \neq 0$, niin

$$\tan(\arg(\mathbf{x})) = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{“eli”} \quad \arg(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

- Origon vaihekulma $\arg(0)$ on “epämääräinen”.

1.3 Napakoordinaatit

Esimerkki 12

Mitkä ovat karteesisissa koordinaateissa ilmoitetun pisteen $\mathbf{x} = (\sqrt{3}, 1)$ napakoordinaatit?

Ratkaisu:

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6. \end{cases}$$

Napakoordinaateissa siis $x = (2, \pi/6)$.

(Tarkistus: $2 \cos(\pi/6) = \sqrt{3}$, $2 \sin(\pi/6) = 1$.)

1.4 Kompleksiluvut

Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ovat luonnollinen joukko aloittaa laskeminen.

Jos halutaan ratkaista muotoa $x + n = m$, $n, m \in \mathbb{N}$, olevat yhtälöt, kaippaa lukujen joukko kuitenkin laajennusta kokonaislukujen joukoksi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Tämäkään ei riitä muotoa $nx = m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, olevien yhtälöiden ratkaisemiseen, vaan tarvitaan laajennus rationaalilukuihin:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

1.4 Kompleksiluvut

Rationaalilukujenkaan joukosta ei löydy ratkaisua yhtälölle $x^2 = 2$. Tätä varten tehdään vielä laajennus, otetaan mukaan myös irrationaaliluvut, jolloin saadaan reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Onko kaikki nyt hyvin?

Mikä on yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisu?

1.4 Kompleksiluvut

Määritellään *imaginääriyksikkö* i olemaan luku, jolle pätee

$$i^2 = -1.$$

Imaginääriyksikköä i voitaisiin siis tavallaan kutsua myös -1 :n neliöjuureksi.

Määritelmä 13

Kompleksiluku on muotoa

$$a + ib$$

oleva esitys, jossa a ja b ovat reaalilukuja ja i imaginääriyksikkö.

$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on kompleksilukujen joukko.

1.4 Kompleksiluvut

Samaistetaan vektori $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja kompleksiluku $x + iy \in \mathbb{C}$, eli

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ \cong \mathbb{C} &= \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Esimerkki 14

Piirrä kompleksiluvut $1 + 2i$, $2 - i$, i , -2 ja $-3 - 2i$ koordinaatistoon.

Tulkitsemalla kompleksiluvut tason vektoreiksi nähdään heti, miten niiden yhteenlasku pitää suorittaa.

1.4 Kompleksiluvut

Olkoot $z = x + iy$ ja $w = a + ib$ kompleksilukuja.
Tällöin lukujen w ja z summa on

$$\begin{aligned}w + z &= (a + ib) + (x + iy) \\ &= (a + x) + i(b + y),\end{aligned}$$

erotus

$$\begin{aligned}w - z &= (a + ib) - (x + iy) \\ &= (a - x) + i(b - y),\end{aligned}$$

ja tulo

$$\begin{aligned}wz &= (a + ib)(x + iy) \\ &= ax + aiy + ibx + ibiy \quad (\text{Muista: } i^2 = -1!) \\ &= (ax - by) + i(ay + bx).\end{aligned}$$

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 15

Olkoot $w = 2 + 2i$ ja $z = 2 - i$. Laske $w + z$, $w - z$ ja wz .
Tarkista piirtämällä kuvat.

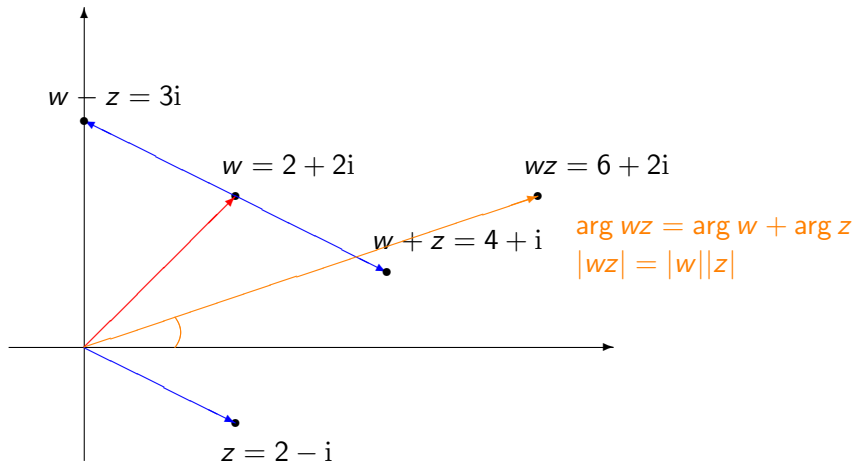
Ratkaisu:

$$w + z = (2 + 2) + i(2 - 1) = 4 + i,$$

$$w - z = (2 - 2) + i(2 - (-1)) = 3i,$$

$$wz = ((2)(2) - (2)(-1)) + i((2)(-1) + (2)(2)) = 6 + 2i.$$

1.4 Kompleksiluvut



1.4 Kompleksiluvut

Määritelmä 16

Luvun $z = z_1 + i z_2 \in \mathbb{C}$ *reaaliosa* on $\operatorname{Re}(z) := z_1 \in \mathbb{R}$ ja *imaginaariosa* on $\operatorname{Im}(z) := z_2 \in \mathbb{R}$.

Luku $\bar{z} = z_1 - i z_2 = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$ on luvun z *kompleksikonjugaatti* (eli liittoluku).

Määritelmä 17 (Itseisarvo ja argumentti)

Jos $z = z_1 + i z_2 \in \mathbb{C}$, olkoon

$$|z| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad \text{ja} \quad \arg(z) := \arg((z_1, z_2)).$$

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 18

Nyt $|\bar{z}| = |z|$ ja $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, joten $\bar{z}z = |z|^2$.

Tarkistus:

$$\bar{z}z = (z_1 - iz_2)(z_1 + iz_2) = (z_1^2 + z_2^2) + i(z_1z_2 - z_2z_1) = |z|^2.$$

Huom. Jos $0 \neq z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned} z &= |z| \left(\frac{z_1}{|z|} + i \frac{z_2}{|z|} \right) \\ &= |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

missä $\varphi = \arg(z)$.

1.4 Kompleksiluvut

Käänteisluku:

Kompleksiluvun $z = x + iy$ käänteisluvulle saadaan laskusääntöjen avulla muoto

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

jos $z \neq 0$. Yleisemmin kompleksiluku w/z voidaan sieventää muotoon $a + ib$ laventamalla se nimittäjän liittoluvulla $\bar{z}$:

$$\frac{w}{z} := w \frac{1}{z} = w\bar{z}/|z|^2.$$

Siis $|w/z| = |w|/|z|$ ja $\arg(w/z) = \arg(w) - \arg(z)$.

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 19

$$\frac{2 + 3i}{4 - 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{-7 + 22i}{41} = -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i.$$

Esimerkki 20

Jos $n \in \mathbb{Z}$, niin $|z^n| = |z|^n$ ja $\arg(z^n) = n \arg(z)$.

Tapauksessa $z = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ saadaan **de Moivre'n kaava**:

$$(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

1.4 Kompleksiluvut

Tekniikassa kompleksiluvut kirjoitetaan usein ns. polaarimuodossa

$$re^{i\varphi}.$$

Tämä tarkoittaa tason pistettä, jonka napakoordinaatit ovat (r, φ) . $e^{i\varphi}$ on yksinkertaisesti lyhyempi merkitätapa kompleksiluvulle $\cos \varphi + i \sin \varphi$. Siis

$$\begin{aligned} re^{i\varphi} &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r \cos \varphi + ir \sin \varphi \\ &= x + iy. \end{aligned}$$

Fakta $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ voidaan osoittaa esim. sarjakehitelmien avulla, tämä tehdään kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta 1.

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 21

Mitkä kompleksiluvut toteuttavat yhtälön $z^3 = 1$?

Vastaus: Ratkaise kirjoittamalla luvut polaarimuodossa $z = re^{i\varphi}$, $1 = 1e^{in2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$(re^{i\varphi})^3 = r^3 e^{i3\varphi} = 1e^{in2\pi},$$

josta $r^3 = 1$ ja $3\varphi = n2\pi$. Yhtälön toteuttavat siis pisteet, joille $r = 1$ ja $\varphi = n\frac{2}{3}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, eli $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ja $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Nämä kolme pistettä sijaitsevat tasavälein yksikköympyrällä.

1.4 Kompleksiluvut

Seuraava tulos on seurauksiltaan järjestyttävä (vaikkei ehkä heti uskoisi). Sen mukaan ei-vakiolla polynomilla on nollakohta:

Lause 22 (Algebran peruslause)

Olkoon $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polynomi eli

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

missä $a_k \in \mathbb{C}$ ja $a_n \neq 0$.

Jos $n \geq 1$, niin $p(w) = 0$ jollakin $w \in \mathbb{C}$.

1.4 Kompleksiluvut

Seuraus: Jos polynomi p on kuten edellä, niin

$$p(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n),$$

missä $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 23

$p(z) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$
eli polynomin p juuret ovat $-i, i \in \mathbb{C}$ (eivät reaalisia!).

Esimerkki 24

Etsi polynomi, jolla on sekä reaalisia että imaginäärisiä juuria.

1.4 Kompleksiluvut

Esimerkki 25 (lasketaan luennolla)

Etsi polynomin $p(z) = z^2 + (1 - 5i)z - (4 + 4i)$ juuret.

Ratkaisu: Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(1 - 5i) \pm \sqrt{(1 - 5i)^2 - 4(-4(1 + i))}}{2} \\ &= \frac{5i - 1 \pm \sqrt{1 - 10i - 25 + 16i + 16}}{2} \\ &= \frac{5i - 1 \pm \sqrt{-8 + 6i}}{2} \end{aligned}$$

1.4 Kompleksiluvut

Neliöjuuri voidaan laskea seuraavasti: $\sqrt{-8 + 6i} = x + iy$
korotetaan puolittain neliöön, jolloin saadaan
 $-8 + 6i = x^2 + 2ixy - y^2$. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

ja saadaan ratkaisuiksi $x = 1, y = 3$ ja $x = -1, y = -3$, eli
 $\sqrt{-8 + 6i} = \pm(1 + 3i)$.

Näin ollen polynomin nollakohdat ovat $z = \frac{5i-1-(1+3i)}{2} = -1 + i$ ja
 $z = \frac{5i-1+(1+3i)}{2} = 4i$.

1.4 Kompleksiluvut

Huom. Neliöjuuri voitaisiin laskea myös samalla idealla kuin kompleksiluvun potenssi aiemmin, eli muuntamalla $-8 + 6i$ polaarimuotoon, ottamalla sitten neliöjuuri ($\sqrt{re^{i\varphi}} = r^{1/2}e^{i\varphi/2}$) ja muuntamalla lopuksi takaisin kompleksimuotoon.

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.