Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Vahvistimien kohina ja lineaarisuus

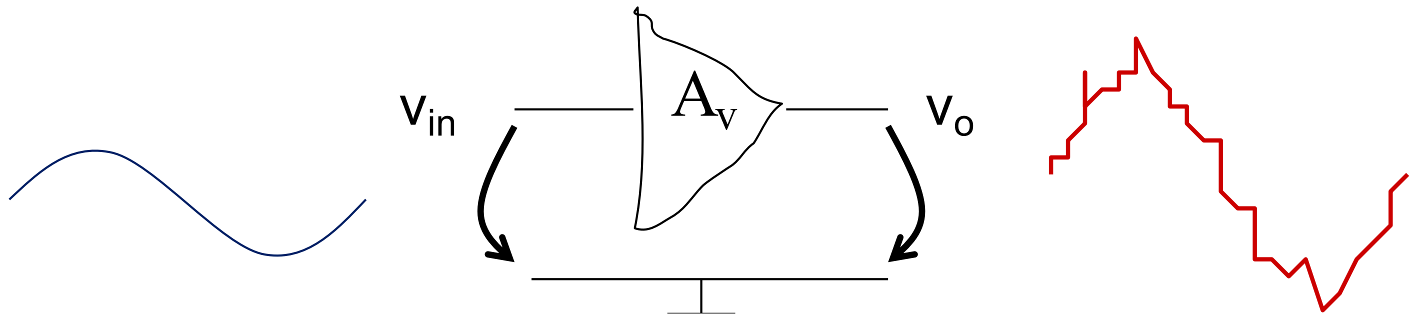
ELEC-C3230 Elektroniikka I (Ryynänen Kosunen)

Luennon pääkohdat

- **Vahvistimen kohinan mallinnus**
- **Kohinakaistanleveys**
- **Jännite- ja virtakohina**
  - Kohina operaatiovahvistinkytkennöissä
- **Vahvistimen epälineaarisuuden mallinnus**
  - Harmoninen särö, THD
- **Differentiaaliparin harmoninen särö**

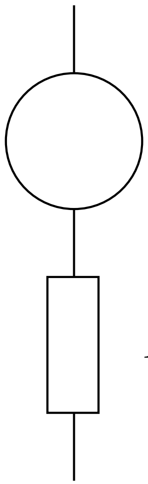
Komponenttikohina

- **Elektroniset systeemit eivät koskaan ole täysin deterministisiä.**
- **Komponentteissa syntyy erilaisista fysikaalisista prosesseista johtuen kohinaa.**
  - Terminen kohina syntyy elektronien lämpöliikkeestä ja on valkoista (ei riipu taajuudesta).
  - Kohina voi myös olla muokkautunutta taajuustasossa esim. 1/f.
- **Kohinaa käsitellään usein tehotiheytenä (V^2/Hz tai W/Hz)**
  - Ilman kaistanleveyttä kohinan teho ei ole määritelty.



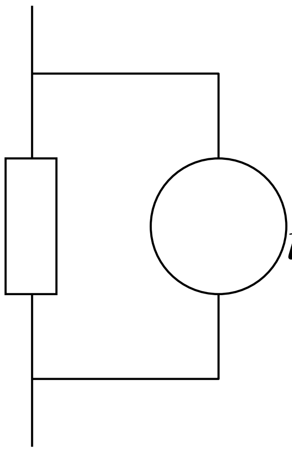
Vastuksen terminen kohina

- **Vastuksen läpi kulkeva virta ei täysin seuraa Ohmin lakia, johtuen varauksenkuljettajien lämpöliikkeestä.**
- **Virrassa näkyy satunnainen komponentti, joka riippuu sekä vastuksen resistanssista, että lämpötilasta.**
- **Vastuksen terminen kohina voidaan mallintaa joko sarjajännitelähteenä tai rinnakkaisvirtalähteenä.**



$$e_n^2 = 4kTRB$$

R



$$i_n^2 = 4kT\frac{1}{R}B$$

Boltzmannin vakio

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\, J/K$$

T=lämpötila B=kaistanleveys

Vahvistimen kohinan mallinnus

- **Kohina mallinnetaan lisäämällä vahvistimen tuloon kohinalähde, joka aiheuttaisi lähdössä havaittavan kohinan.**
- **Esimerkiksi:**

Vahvistimen lähdössä mitattu jännitekohinan tiheys on $2\mu V/\sqrt{Hz}$

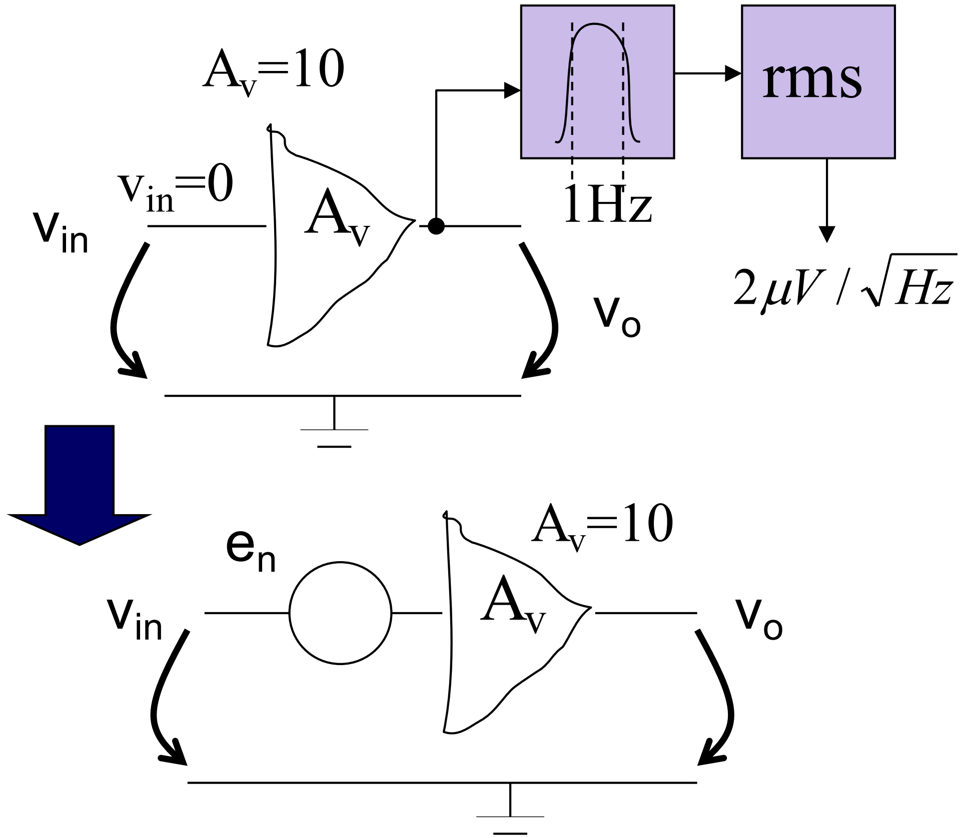
Vahvistimen jännitevahvistus on 10 (eli 20dB) ja $R_{in} >> R_s$.

Redusoidaan kohina tuloon

$$e_n = 2\mu V/\sqrt{Hz}/10 = 200nV/\sqrt{Hz}$$

Jos vahvistimen lähtösignaalin kaista rajoitetaan esim. 1MHz:iin saadaan kohinajännitteeksi lähdössä:

$$n_o = \sqrt{10^6 Hz \cdot \left(2\mu V/\sqrt{Hz}\right)^2} = 2mV_{rms}$$



Kohinakaistanleveys

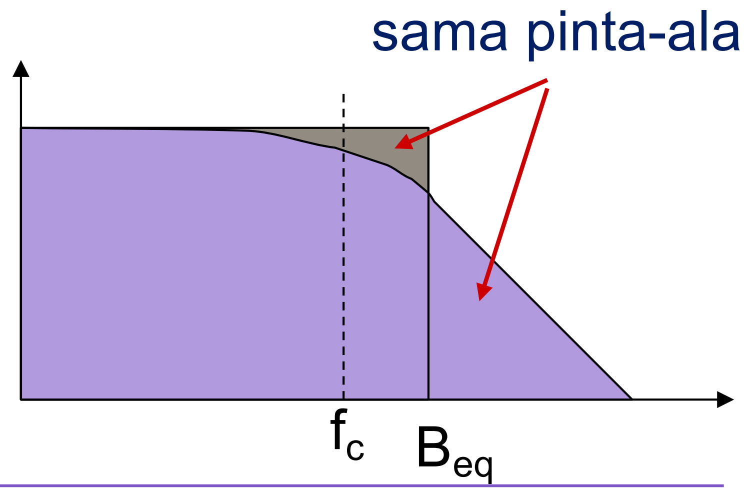
- **Kohinateho tai -jännite lähdössä saadaan integroimalla tehotiheys tulossa yli vahvistimen taajuusvasteen**

$$n_o^2 = \int_0^\infty \left|T(j2\pi f)\right|^2 e_n^2 df$$

- **Yhden navan taajuusvasteen ekvivalentti kohinakaistanleveys B_{eq} on $\Pi/2 \cdot f_c$.**

$$\int_0^\infty \left|\frac{K}{1+jf/f_c}\right|^2 df = \int_0^{B_{eq}} K^2\, df \Rightarrow B_{eq} = \frac{\pi}{2} f_c$$

kulmataajuus!



Esimerkki 1

- **Edellisen esimerkin jännitevahvistimen jännitekohinan tiheys tulossa**

$$e_n = 200nV_{rms} / \sqrt{Hz}$$

- **Vahvistimen ylärajataajuus f_c=1MHz ja jännitevahvistus A_v=10. Silloin jännitevahvistuksen taajuusvaste on**

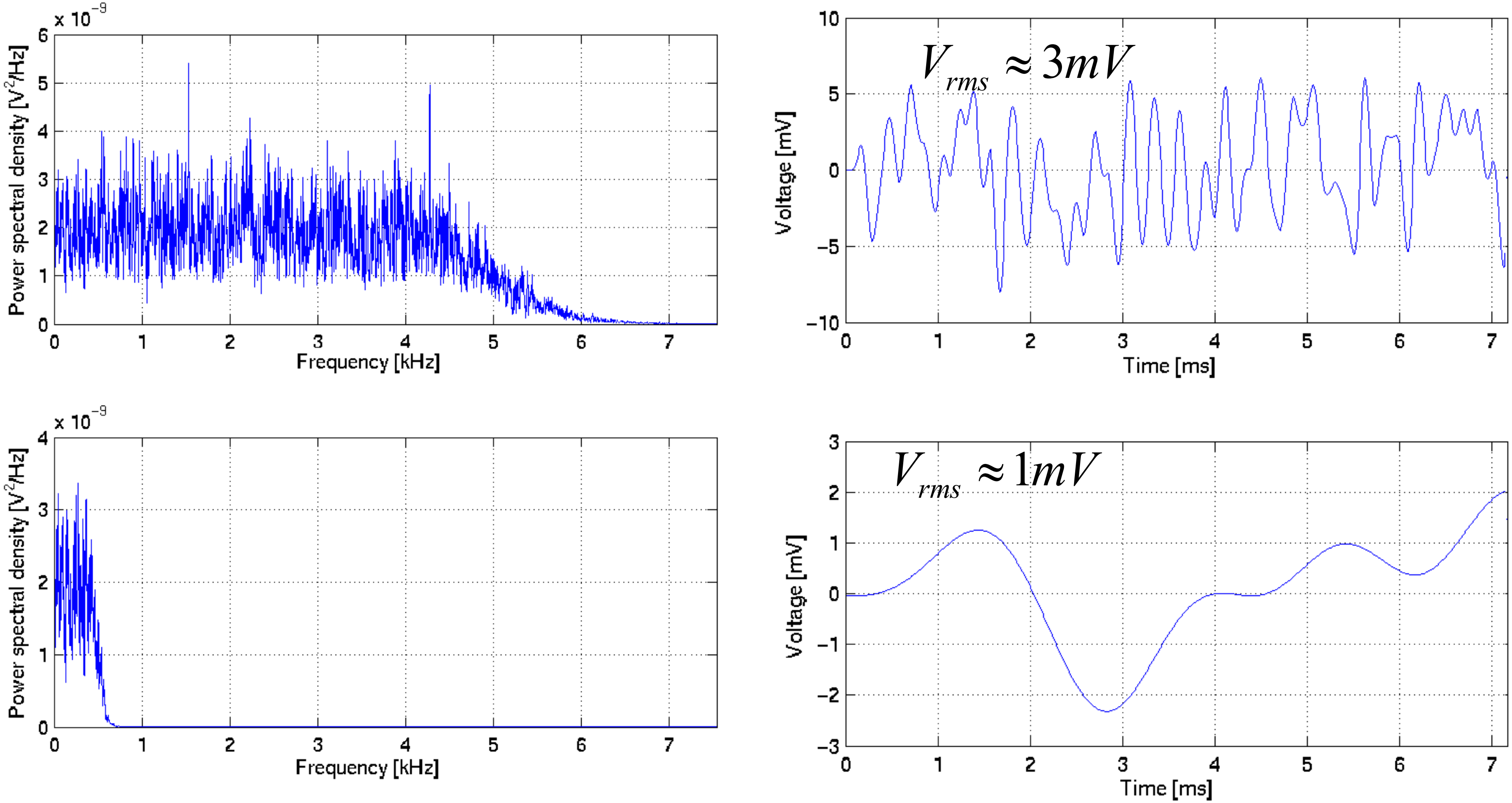
$$T(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega / 2\pi \cdot 10^6}$$

- **Lähdössä näkyvän kohinajännitteen rms-arvo on**

$$n_0 = \sqrt{A_v^2 \cdot e_n^2 \cdot B_{eq}} = \sqrt{\left(10 \cdot 200nV_{rms} / \sqrt{Hz}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 10^6\,Hz} \cong 2.5mV_{rms}$$

- **Kun kaistanleveydeksi otettiin suoraan 10^6 Hz tuli kohinaksi 2mV_{rms} → ei kovin suurta eroa.**

Kohinakaistanleveyden vaikutus

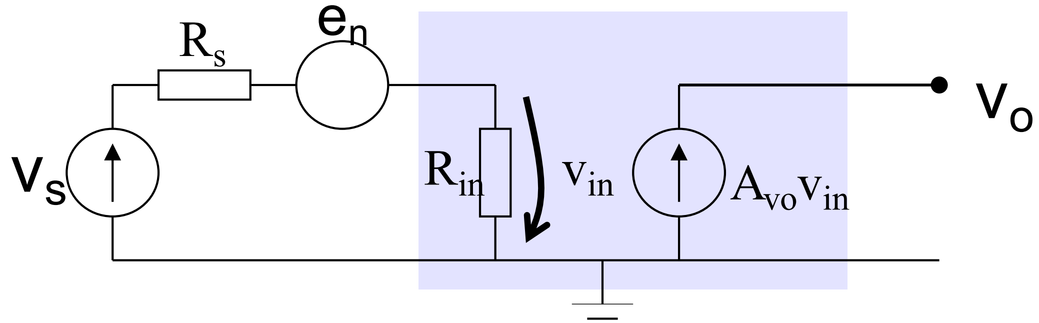


Lähderesistanssin vaikutus

- **Lasketaan oheisen vahvistimen lähdössä näkyvä jännitekohinan tehotiheys:**

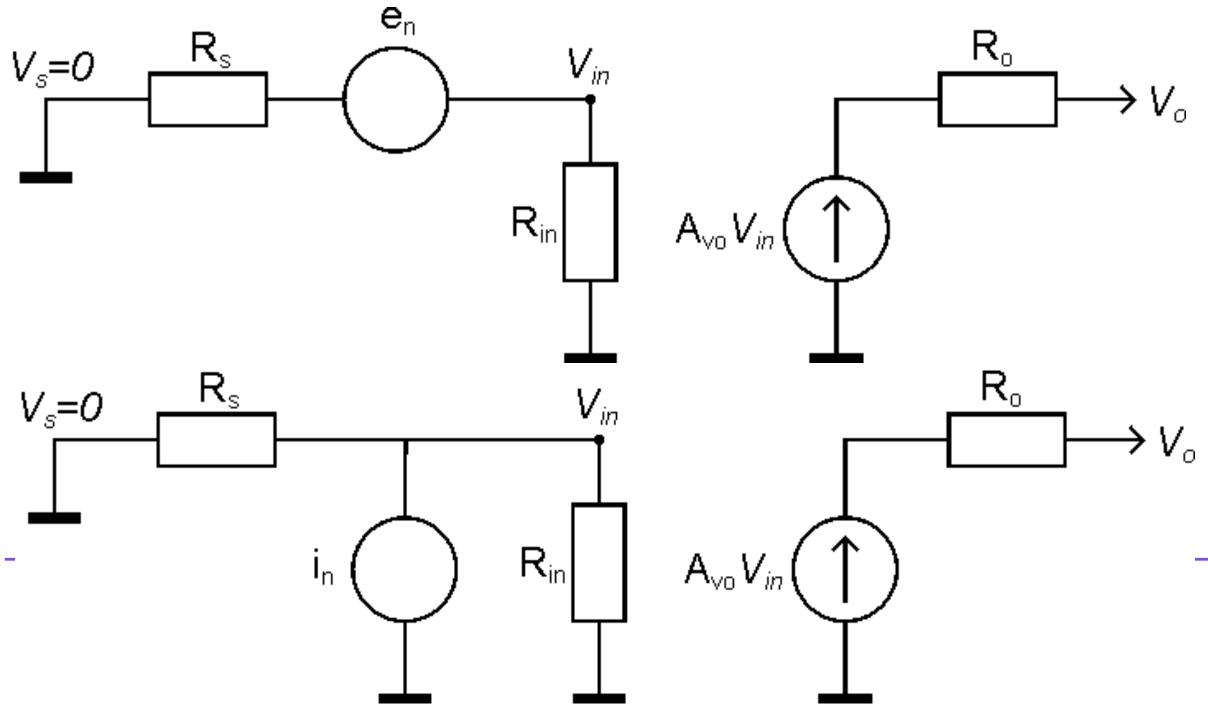
$$e_{no} = \frac{R_{in}}{R_s + R_{in}} A_{vo} e_n$$

- **Lähdössä näkyvä kohina riippuu lähteen impedanssista vaikka e_n kuvaa vahvistimen sisäisiä ominaisuuksia!**
  - Ääritapauksessa $R_s=\infty$ →vahvistimesta tuleva kohina lähdössä nolla.
- **Pelkkä jännitekohinalähde riittää vahvistimen kohinan mallintamiseen ainoastaan, kun R_{in} >>R_s.**



Jännite- ja virtakohina

- **Yleisessä tapauksessa täytyy lisätä virtakohinalähde, jotta malliin ei sisälly oletusta signaalilähteen ominaisuuksista.**
  - Jännitekohinan vaikutus voimistuu kun $R_{in} >> R_s$.
  - Virtakohinan vaikutus voimistuu kun $R_s >> R_{in}$.
  - Usein kohinakomponentteja en ja in käsitellään toisistaan riippumattomina, vaikka näin ei välttämättä ole.



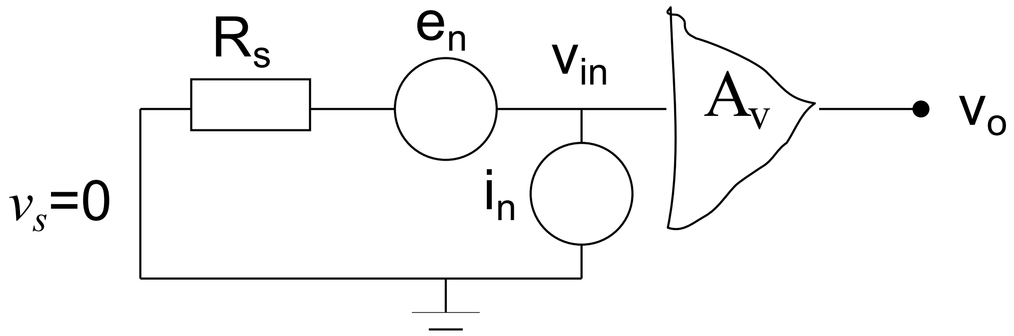
$$e_{no} = \frac{R_{in}}{R_s + R_{in}} e_n A_{vo}$$

$$e_{no} = \frac{R_s R_{in}}{R_s + R_{in}} i_n A_{vo}$$

Esimerkki 2

- **Lasketaan vahvistimen lähdössä näkyvän kohinajännitteen rms-arvo.**
  - Oletetaan, että kohinalähteet ovat korreloimattomia, jolloin niiden **tehon** voi laskea yhteen.

$$e_n = 400nV_{rms}/\sqrt{Hz}$$
$$i_n = 200pA_{rms}/\sqrt{Hz}$$
$$R_s = 1k\Omega, R_{in} = 1k\Omega$$
$$A_v = 10, \; f_c = 1MHz$$



$$e_{no}^2 = \left[\left(\frac{R_{in}}{R_{in}+R_s}e_n\right)^2 + \left(\frac{R_{in}R_s}{R_{in}+R_s}i_n\right)^2\right]A_v^2 = 5pV^2/Hz$$

$$\left(e_{no} = 2.24\mu V_{rms}/\sqrt{Hz}\right)$$

$$n_o^2 = e_{no}^2 B_{eq} = e_{no}^2 \frac{\pi}{2} f_c \quad \Rightarrow \underline{n_0 = 2.8mV_{rms}}$$

Lähderesistanssin vaikutus

- **Jos vahvistin on matalakohinainen saattaa lähderesistanssin kohinalla olla merkittävä vaikutus.**
- **Lähderesistanssin kohinan voi laskea suoraan yhteen vahvistimen tuloon redusoidun jännitteen kohinan tehotiheyden kanssa.**
- **Tarkennetaan edellistä laskua:**

$$e_{no}^2 = \left[\left(\frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} \right)^2 \left(e_n^2 + 4kTR_s \right) + \left(\frac{R_{in} R_s}{R_{in} + R_s} i_n \right)^2 \right] A_v^2 = 5.0004\, pV^2 / Hz$$

Lähdön kohinan tehotiheydessä ei mainittavaa muutosta.

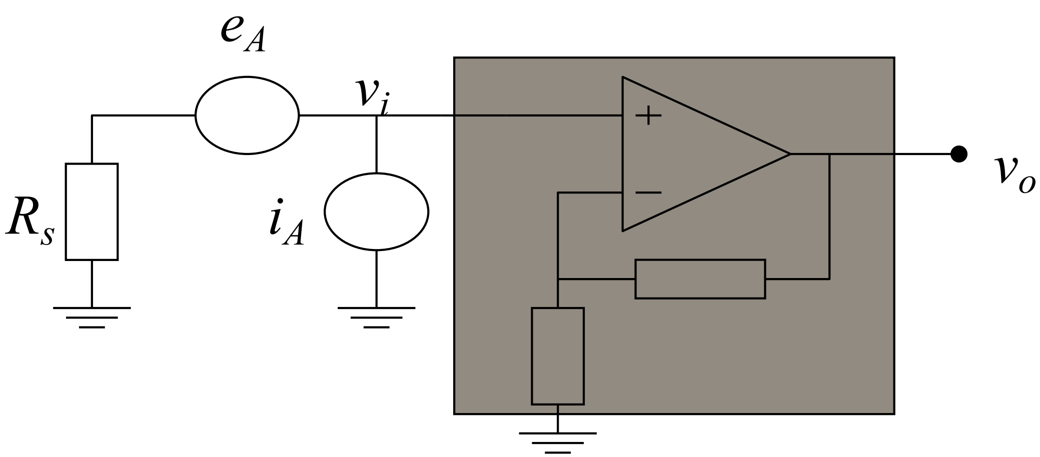
- **Nyrkkisääntönä 1kΩ:n vastuksen kohina huoneenlämpötilassa:** $e_n(1k\Omega) = 4nV_{rms} / \sqrt{Hz}$

Kohina operaatiovahvistinkytkennöissä

- **Operaatiovahvistimen oma kohina ilmoitetaan yleensä sen tuloon redusoituina jännite- ja virtakohinoina.**
- **Lisäksi huomioon täytyy ottaa kytkennässä käytettyjen vastusten kohina.**
- **Redusoidaan operaatiovahvistinkytkennän kohina jännite- ja virtakohinalähteiksi (e_A ja i_A) kytkennän tuloon.**
- **Kytkennän kohinakontribuutio tulossa** $e_i^2 = e_A^2 + \left(R_S i_A\right)^2$

$$B_{eq} = \frac{\pi}{2} \frac{f_t}{1 + R_2/R_1}$$

$$v_i^2 = B_{eq} e_i^2$$



Ei-invertoiva kytkentä

- **Jännitekohinaa e_A laskettaessa oletetaan R_s=0.**
- **i_A putoaa pois, mutta operaatiovahvistimen oma i_n vaikuttaa lähtöön.**

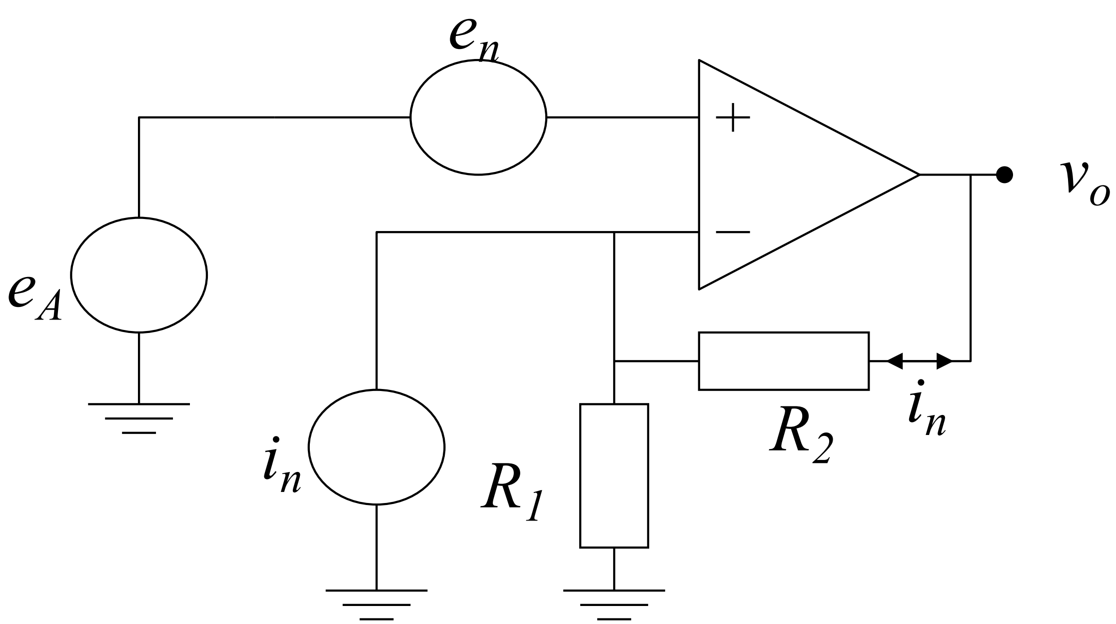
$$e_o = i_n R_2$$

- **Redusoituna tuloon**

$$e_{iin} = i_n \frac{R_2}{1 + R_2 / R_1} = i_n \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- **Operaatiovahvistimen oma e_n on sarjassa tulossa, joten se redusoituu suoraan e_A:han.**

$$e_{ien} = e_n$$



Vastusten vaikutus

- **Vastuksien kohinaa voidaan kuvata sarjajännitelähteellä, jonka tehotiheys on 4kTR (kT~4.14e-21J, kun T=300K)**
- **R_1:n kohina lähdössä:**

$$e_o = \sqrt{4kTR_1}\,\frac{R_2}{R_1}$$

- **Redusoituna tuloon:**

$$e_{ir1} = \sqrt{4kTR_1}\,\frac{R_2}{R_1}\,\frac{1}{1+R_2/R_1}$$

- **R_2:n kohina lähdössä:**

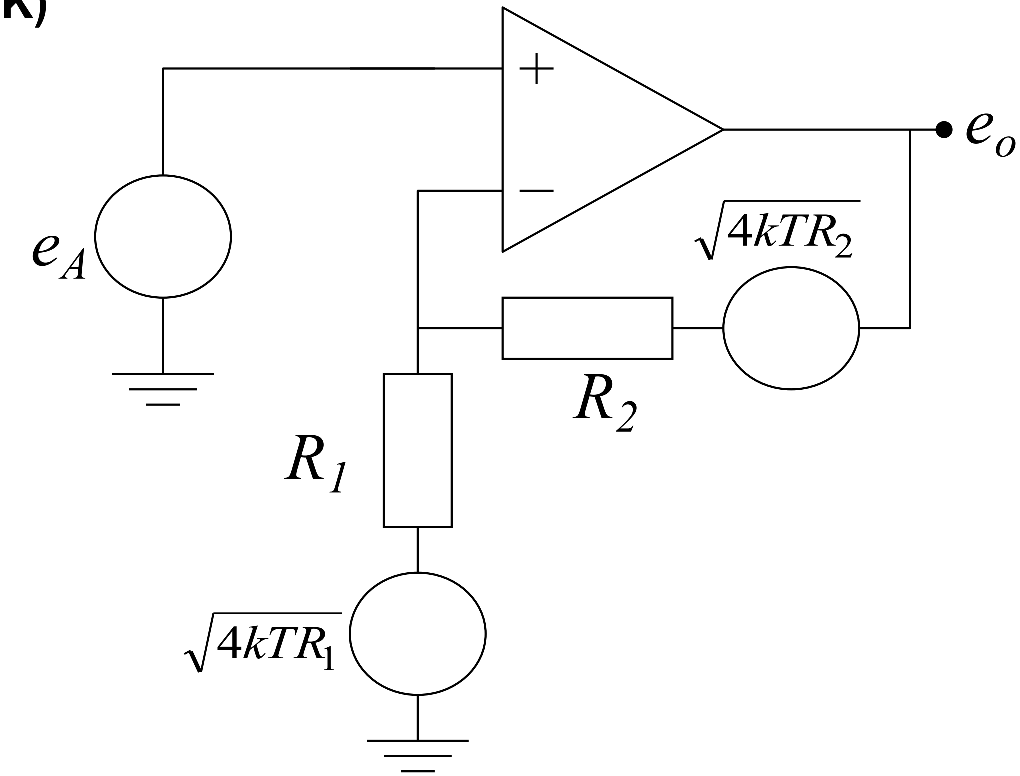
$$e_o = \sqrt{4kTR_2}$$

- **Redusoituna tuloon**

$$e_{ir2} = \sqrt{4kTR_2}\,\frac{1}{1+R_2/R_1}$$

- **Kohinat summattuna**

$$e_{ir}^2 = 4kTR_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{1}{\left(1+R_2/R_1\right)^2} + 4kTR_2\,\frac{1}{\left(1+R_2/R_1\right)^2} = 4kT\,\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

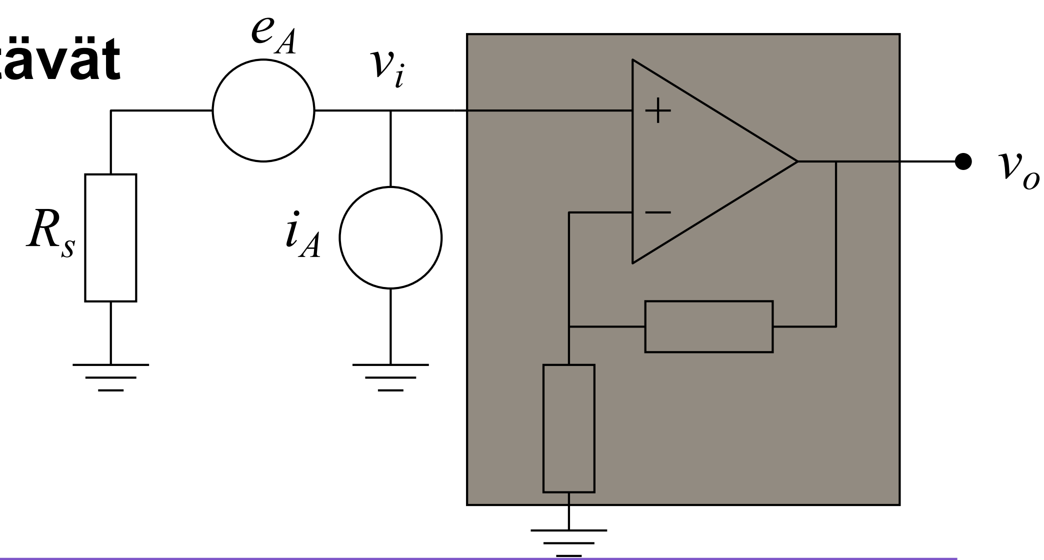


Tulosten yhdistäminen

- **Ainoa kohinavirta joka pääsee tuloon, on operaatiovahvistimen oma kohina i_n.**
- **Summataan jännitekohinakontribuutiot:**

$$\begin{cases} e_A^2 = e_n^2 + i_n^2 (R_1 \parallel R_2)^2 + 4kT(R_1 \parallel R_2) \\ i_A = i_n \end{cases}$$

- **Matalat vastusarvot pienentävät kohinaa, mutta**
- **Korkeampi virrankulutus.**
- **Epälineaarisempi vahvistin.**



Esimerkki 3

- **LM118: en=11nV/√Hz, in=0.59pA, R1=1kΩ, R2=9k Ω, Rs=1kΩ.**

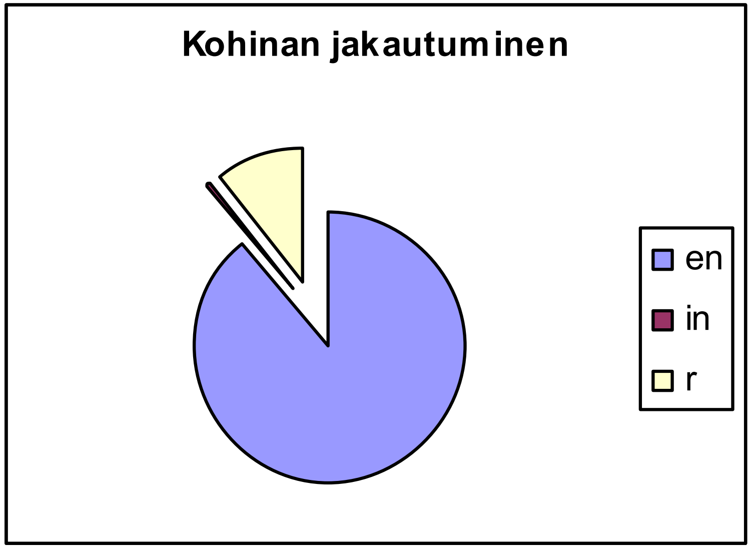
$$\begin{cases} e_A^2 = e_n^2 + i_n^2 (R_1 \parallel R_2)^2 + 4kT(R_1 \parallel R_2) = 1.37e-16 V/Hz \\ i_A = 3.48e-25 A/Hz \end{cases}$$

$$e_i^2 = e_A^2 + (R_S i_A)^2 = 1.37e-16 V/Hz$$

- **f_t=15MHz, ACL=10 → f_{-3dB}=1.5MHz**

→B_{eq}= Π/2•1.5MHz=2.35MHz.

$$n_i^2 = e_i^2 B_{eq} \Rightarrow n_i = \underline{0.18 \mu V}$$



- **89% kohinasta tulee en:stä.**
- **Virtakohina näkyy vasta kun R_s>10kΩ.**
- **Takaisinkytkentä lisää kohinaa tulossa, koska kaista levenee.**
- **Karkea approksimaatio, koska eri kohinalähteiden näkemä kaistanleveys ei ole sama.**

Signaali-kohina suhde (SNR)

- **Vahvistimien (ja monimutkaisempien elektronisten piirien) kohinaisuutta kuvataan usein signaalin ja kohinan suhteella piirin lähdössä.**
- **Signaali-kohina suhde ilmoitetaan yleensä desibeleinä ja määritellään jännitesignaaleille:**

$$SNR\left[dB\right] = 20\log_{10}\frac{V_o}{n_o},$$

missä V_o on signaalijännitteen rms-arvo ja n_o kohinajännitteen rms-arvo lähdössä.

- **SNR riippuu signaalin amplitudista, joten se ei ole hirveän hyvä tunnusluku.**
- **Sitä käytetään kuitenkin paljon ja ajatellaan signaalin olevan ”maksimissaan”.**

Epälineaarisuus

- **Usein elektronisiin vahvistimiin liittyvän epälineaarisuuden oletetaan olevan ”pehmeää”.**
- **Tarkoittaa käytännössä sitä, että piirissä ei esiinny signaalin leikkautumista.**
- **Pehmeästi käyttäytyvien vahvistimien epälineaarisuutta voidaan mallittaa Taylorin sarjan avulla.**

$$f\left(v_{in}\right) = k_1 v_{in} + k_2 v_{in}^2 + k_3 v_{in}^3 \ldots; \quad k_n = \frac{f_n^{(n)}\left(v_0\right)}{n!}$$

- **Useimmiten ensimmäiset kolme termiä riittävät.**
  - Mahdollinen DC-termi jätetään tässä huomiotta, koska se on vain toimintapiste.
- **Jos f(v_{in}) on epälineaarinen jännitteen siirtofunktio, on k_1 sen lineaarinen vahvistus (eli A_v).**

Harmoninen särö

- **Tutkitaan millainen vaste epälineaarisella vahvistimella on sinimuotoiseen herätteeseen.**
  - Oletetaan, että vain kaksi ensimmäistä epälineaarista termiä ovat merkittäviä

$$f(\hat{v}\sin(\omega t)) = k_1\hat{v}\sin(\omega t) + k_2(\hat{v}\sin(\omega t))^2 + k_3(\hat{v}\sin(\omega t))^3$$

$$= \frac{k_2}{2}\hat{v}^2 + \underbrace{\left(k_1\hat{v} + \frac{3k_3}{4}\hat{v}^3\right)}_{A_1}\sin(\omega t) - \underbrace{\frac{k_2}{2}\hat{v}^2}_{D_2}\cos(2\omega t) - \underbrace{\frac{k_3}{4}\hat{v}^3}_{D_3}\sin(3\omega t)$$

k_2 tuottaa myös DC-komponentin

- **2. ja 3. kertaluvun epälineaarisuudet tuottavat harmoniset säräkomponentit D_2 ja D_3.**
- **Säröt kasvavat nopeammin kuin signaali amplitudin noustessa.**
- **Epälineaarisuus muodostuu ongelmaksi signaalin ollessa suuri.**

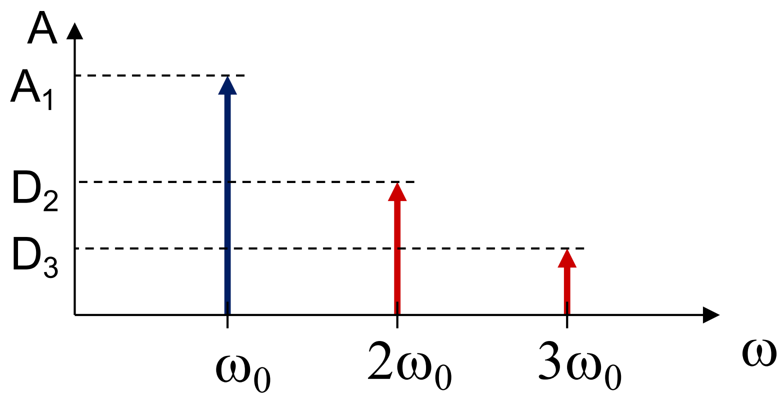
Särömääritelmiä

- **Toisen ja kolmannen kertaluvun harmoninen särö määritellään lähdössä herätetaajudella olevan sinin ja sen toisella ja kolmannella harmonisella olevien särökomponenttien amplitudien suhteena.**

$$HD_2 = \left|\frac{D_2}{A_1}\right| \approx \frac{k_2}{2k_1}\hat{v} \qquad HD_3 = \left|\frac{D_3}{A_1}\right| \approx \frac{k_3}{4k_1}\hat{v}^2$$

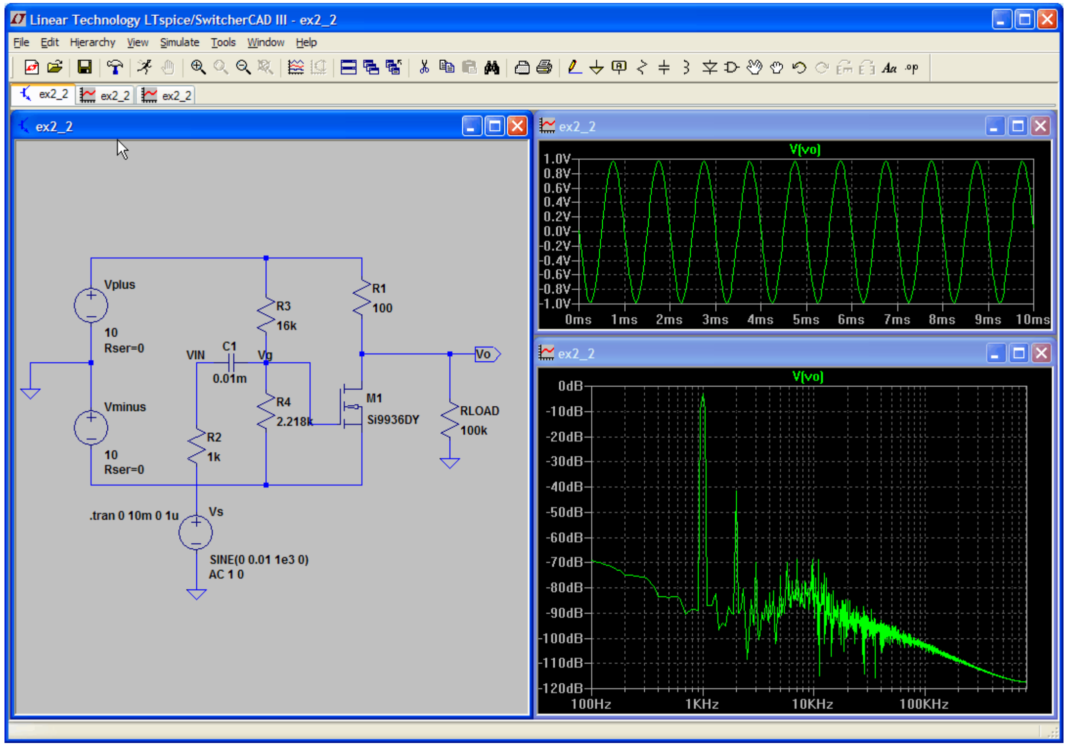
- **Kaikki harmoniset säröt yhdistämällä saadaan harmoninen kokonaissärö (total harmonic distortion)**

$$THD = \frac{\sqrt{D_2^2 + D_3^2 \ldots}}{A_1}$$



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Simulaatioesimerkki



Tutkitaan vahvistimen lähdön spektriä Fourier-muunnoksen avulla.

$$A_1 = 10^{-2.8dB/20} \approx 0.7V_{rms}$$

$$D_2 = 10^{-41.4dB/20} \approx 8.5mV_{rms}$$

$$HD_2 = \left|\frac{D_2}{A_1}\right| \approx 0.0117 \approx -38.6dB$$

Desibeleinä saman saa helpommin:

$$HD_2[dB] = D_2[dB] - A_1[dB] = -38.6dB$$

Karakterisointi harmonisen särön avulla

- **HD_2 ja HD_3 riippuvat heräteamplitudista, joten ne eivät ole kovin hyviä malliparametreja.**
- **Niitä käytetään kuitenkin yleisesti ja oletetaan amplitudin olevan ”maksimissaan”.**
- **Säröt saatetaan ilmoittaa vähän millä sattuu signaalitasolla.**
- **Mittaamalla tai simuloimalla harmoniset särökomponentit voi helposti laskea takaperin Taylor-sarjan kertoimet.**

$$|k_1| \approx \frac{A_1}{\hat{v}}, \quad |k_2| \approx 2\frac{D_2}{\hat{v}^2}, \quad |k_3| \approx 4\frac{D_3}{\hat{v}^3}$$

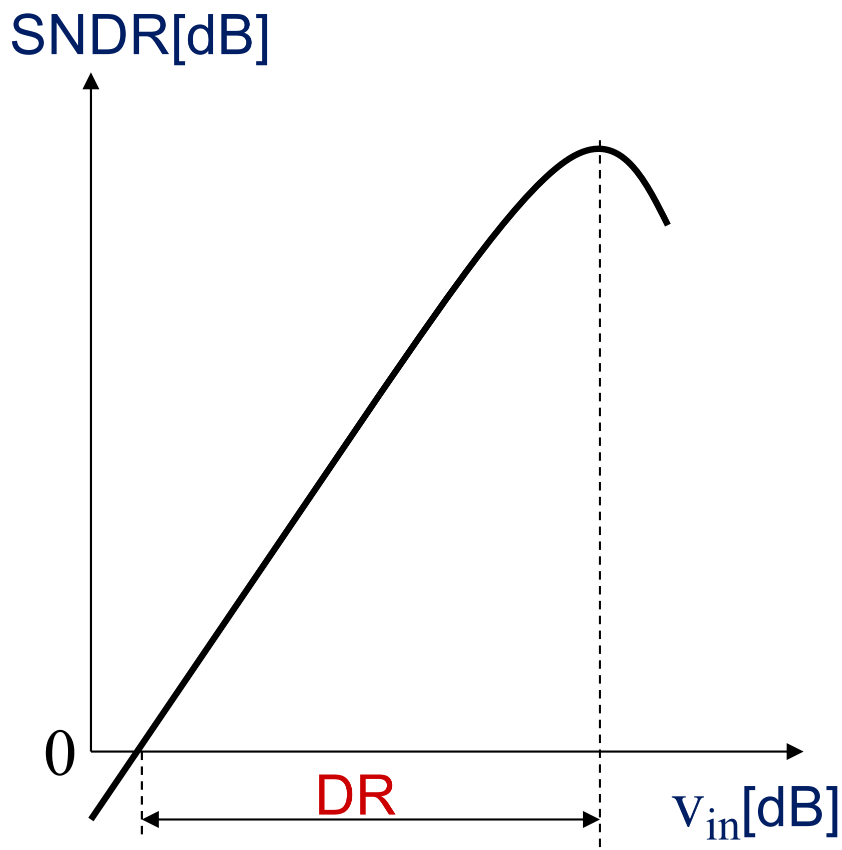
- **Kerrointen merkit voi selvittää suoraan vaihesiirroista.**
  - k_2:n merkin näkee myös sen tuottaman DC-komponentin merkistä.
  - k_3:n merkki on kompressoituvalle vahvistimelle $-\mathrm{sgn}(k_1)$.

Dynaaminen alue

- **Signaalin puhtautta voidaan kuvata SNDR tunnusluvulla**

$$SNDR = \frac{S}{N + D}; D = D_2^2 + D_3^2 \ldots$$

- **Pienellä signaaliamplitudilla signaalin puhtautta rajoittaa kohina.**
- **Amplitudin kasvaessa särön merkitys kasvaa.**
- **Särö kasvaa nopeammin kuin signaali.**
  - D_2 kasvaa tulon amplitudin neliössä.
  - D_3 kasvaa tulon amplitudin kuutiossa.
- **SNDR alkaa pudota kun särö tulee voimakkaammaksi kuin kohina.**
- **SNDR:n huippua ja kohinalattiaa vastaavien tuloamplitudien suhde on vahvistimen dynaaminen alue DR.**
- **Myös SINAD termiä käytetään.**



Esimerkki 4

- **Vahvistin on identtinen edellisen esimerkin kanssa paitsi että vahvistimen jännitesiirtofunktio on**

$$v_o = 10 \cdot v_{in} - 0.01 \cdot v_{in}^3$$

- **Lasketaan SNDR kun sinimuotoisen herätteen amplitudi vahvistimen tulossa on 1V.**

Taajuuskomponentit lähdössä:

$$A_1 = k_1 \hat{v} + \frac{3k_3}{4} \hat{v}^3 = 9.925 \quad |D_2| = \frac{k_2}{2} \hat{v}^2 = 0 \quad |D_3| = \frac{k_3}{4} \hat{v}^3 = 0.0025$$

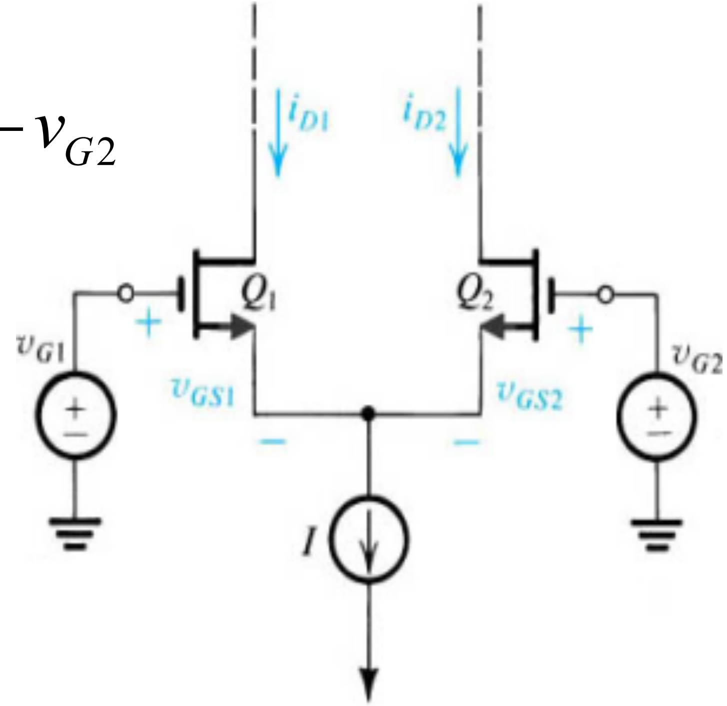
Kohinalaskusta muistetaan, että lähdössä näkyvä kohina on $2.8\text{mV}_{\text{rms}}$

$$SNDR[dB] = 10 \log_{10} \frac{\left(9.925V / \sqrt{2}\right)^2}{(2.8mV)^2 + \left(2.5mV / \sqrt{2}\right)^2} \approx 66.5dB$$

Differentiaaliparin harmoninen särö

- **Tutkitaan vain toista lähtövirtaa**
  - Perustaajuuden ja säröjen suhde lähtöjännitteessä ovat samoja olettaen, että transistorin lähtöresistanssi ei vaikuta.
- **Lasketaan derivaatat 1-3 Taylorin sarjaa varten.**

$$i_{D1} = \frac{I}{2} + \frac{I}{V_{GS} - V_t}\left(\frac{v_{id}}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{v_{id}/2}{V_{GS} - V_t}\right)^2} \qquad v_{id} = v_{G1} - v_{G2}$$



i_{d1}:n ensimmäinen derivaatta:

$$\frac{\partial i_{d1}}{\partial v_{id}}\left(v_{id} = 0\right) = \frac{1}{2}\frac{I}{V_{GS} - V_t}.$$

2. derivaatta on nolla.

i_{d1}:n kolmas derivaatta:

$$\frac{\partial^3 i_{d1}}{\partial v_{id}}\left(v_{id} = 0\right) = -\frac{3}{8}\frac{I}{\left(V_{GS} - V_t\right)^3}.$$

Differentiaaliparin harmoninen särö

- **Kun derivaatat (vid=0 ympäristössä) tunnetaan, saadaan Taylorin sarjan kertoimet:**

$$k_n = \frac{f_n^{(n)}(v_0)}{n!} \qquad k_1 = \frac{1}{2}\frac{I}{V_{GS}-V_t}, k_2 = 0, k_3 = -\frac{1}{16}\frac{I}{(V_{GS}-V_t)^3}$$

- **Kolmas harmoninen särö:**

$$HD_3 \approx \left|\frac{k_3}{4k_1}\right|\hat{v}^2 = \frac{1}{32}\left(\frac{\hat{v}}{V_{GS}-V_t}\right)^2$$

- **Särö riippuu tuloparin esijännitteestä V_{GS}-V_t.**
- **Transistorien dimensiot eivät vaikuta virtojen suhteisiin.**
- **Differentiaaliparin 2. harmoninen särö on nolla.**
- **Näin on aina symmetrisille differentiaalisille piireille.**
- **Differentiaaliparissa edes yksipäisessä lähtösignaalissa ei ole 2. harmonista särökomponenttia.**

Tavoitteet

- **Tietää**
  - Yhden navan vasteen ekvivalentti kohinakaistaleveys.
  - Vastuksen terminen kohina.
  - Miten transistoritason vahvistinkytkennän lineaarisuutta analysoidaan.
- **Ymmärtää**
  - Miten kaistanleveys liittyy vahvistimen kohinaan.
  - Miksi tarvitaan erikseen jännite- ja virtakohinalähteet.
- **Soveltaa**
  - Laskea vahvistimen kohina lähdössä tuloon redusoiduista lähteistä ja kaistasta.
  - Laskea vahvistimen harmoniset särökomponentit HDn:stä (tai kääntäen).