



Tehtävätyypeistä: Johdantotehtävät ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät tarkastetaan vertaisarviointina seuraavalla harjoituskierroksella ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} \mathbf{i} + \frac{t}{t + 1} \mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

Ratkaisu: Asymptootit $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$;

pystysuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), -1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1), 1/\sqrt{2})$.

TEHTÄVÄ J2

a) Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt,$$

missä a on ellipsin ison akselin puolikas ja e eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

Ratkaisu: a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

TEHTÄVÄ V1 Laske asteroidin $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$ koko pituus.

Ratkaisu: 6a.

TEHTÄVÄ V2 Laske väliä $t \in [0, 1]$ vastaava kaarenpituus, kun käyrä on a) $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}$, b) $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \frac{2}{3}t \mathbf{k}$.

Ratkaisu: a) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)$; b) $\frac{5}{3}$.

Haaste

Hiukkanen liikkuu pitkin ellipsiä

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

parametrisoituna muodossa $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Määritä hiukkasen nopeus ja kiihtyvyys parametrin arvolla $t = \pi/4$.

b) Määritä kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponentit parametrin arvolla $t = \pi/4$.

(Vast: $\mathbf{a}_N = -(6\sqrt{2}/13)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$)