

**MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019**

**Laskuharjoitus 2P** viikolla 3 (16.–18.1.)

Aihepiiri: Riemann-integraali. Sisätulo ja normi (MC-monisteet, Väisälä luku 1)

Tehtävät 3 ja 4 on tarkoitus laskea ennen omaa harjoitusryhmää ja lasketut tehtävät merkitään listaan. Assitentti valitsee yhden (tai useamman, jos a-b-...-kohtia) opiskelijan esittämään jomman kumman (satunnaisesti valitun!) tehtävän taululla, ja esittää itse toisen tehtävän ratkaisun.

Loppuajan voi käyttää palautettavien tehtävien laskemiseen. Ne palautetaan kirjallisesti laskutupaa Y190c vastapäätä olevaan lokerikkoon seuraavaan tiistaihin klo 12.15 mennessä. Myös todistustäydennysten 2T palautuksen takaraja on sama.

3. Tarkastellaan *Dirichlet'n funktiota*  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

- a) Osoita, että jokainen rationaaliluku  $r \neq 0$  on funktion  $f$  jakso, t.s.

$$f(x+r) = f(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Vihje: Kaksi tapausta sen mukaan, onko  $x \in \mathbf{Q}$  vai ei.

b) Perustelee: Funktiolla  $f$  ole perusjaksoa eli pienintä positiivista jaksoa.

c) Perustelee: Funktio  $f$  ei ole Riemann-integroituva millään välillä  $[a, b]$ .

Vihje: Tutustu Riemann-integraalin määritelmään MC-materiaalista Reaaliluvut, esimerkki 1.1 sekä luentokalvoon 26. Tämä kohta liittyy a- ja b-kohtiin vain siinä mielessä, että funktio on sama.

4. Laske säännöllisen tetraedrin diedrikulma (sivutahkojen välinen kulma, dihedral angle) seuraavan idean avulla: Asetetaan tetraedrin kärjet 4-ulotteisen avaruuden  $\mathbf{R}^4$  pisteisiin  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  ja  $\mathbf{e}_4$ .

(i) Tarkista että sivujen pituudet  $\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|$  ovat samat, kun  $i \neq j$ .

(ii) Symmetrian perusteella kysytty kulma on sama kuin (esimerkiksi) vektoreiden

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \text{ ja } \mathbf{v} = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

välinen kulma (Piirrä kuva!), joten se on helppo laskea (vrt luentokalvo 39).  
(Vast:  $\arccos(1/3)$ )

5. Tarkastellaan kolmea ensimmäistä *Legendren polynomia*

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1, \\P_1(x) &= x, \\P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2.\end{aligned}$$

a) Osoita, että polynomit ovat pareittain *ortogonaalisia* sisätulon

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

suhteen; t.s.

$$\langle P_i, P_j \rangle = 0, \text{ kun } i \neq j.$$

b) Määritä sellaiset kertoimet  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ , että  $\|c_k P_k\| = 1$  kaikilla  $k \in \{0, 1, 2\}$ , kun normi määräytyy a-kohdan sisätulosta.

Lisätieto: Yhdessä a-kohdan ortogonaalisuuden kanssa b-kohdassa saadaan *ortonormaaleja* vektoreita.

6. a) Osoita, että kaavalla

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

määritelty lauseke toteuttaa seuraavat ehdot:

(N1)  $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$  kaikilla  $x, y \in \mathbf{R}^n$ ;

(N2)  $\|cx\|_1 = |c| \|x\|_1$  kaikilla  $x \in \mathbf{R}^n$  ja  $c \in \mathbf{R}$ ;

(N3)  $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$ .

Huom: Kyseessä on esimerkki (ilman sisätuloa määritellystä) normista, joita käsitellään keskiviikon luennolla 16.1. Katso luentokalvo 43.

b) Olkoon  $n = 2$ . Hahmottele tasojoukko

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1,$$

eli a-kohdan normiin liittyvä yksikköympyrä. Tässä siis  $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ .

**Jatkuu seuraavalla sivulla!**

7. (Fourier-sarjan taustaa: ratkaisu on lyhyempi kuin tehtävänanto! Vertaa myös tehtävään 5.)

Sisätulon avulla voidaan puhua kohtisuorista eli ortogonaalisista vektoreista  $x, y \in E$ , joille  $\langle x, y \rangle = 0$ . Erityisesti vektorijoukko

$$V = \{e_t \mid t \in T\}$$

on *ortonormaali*, jos

$$\langle e_t, e_s \rangle = \delta_{ts} = \begin{cases} 1, & t = s, \\ 0, & t \neq s \end{cases} \quad (= \text{Kroneckerin } \delta\text{-symboli}).$$

Tässä  $T$  voi olla mikä tahansa indeksijoukko.

a) Tarkastellaan numeroituvaa ortonormaalia joukkoa

$$V = \{e_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset E.$$

Oletetaan, että vektorilla  $v \in E$  on jollakin  $n \in \mathbf{N}$  esitys (äärellisenä) lineaarikombinaationa

$$v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n \quad \text{joillakin kertoimilla } c_k \in \mathbf{R}.$$

Muodosta kaavan sisätuloja vektoreiden  $e_k$  kanssa ja päättelä kerrointen  $c_k$  lausekkeet.

Lisätieto: Tulos yleistyy numeroituville lineaarikombinaatioille (eli sarjoille), jos ne suppenevat "riittävän hyvin".

b) Olkoon  $c_0(x) = 1/\sqrt{2} = \text{vakio}$ ,  $c_n(x) = \cos(nx)$  ja  $s_n(x) = \sin(nx)$ , kun  $n \in \mathbf{N}$ . Osoita, että funktiojoukko

$$CS = \{c_0, c_n, s_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

on ortonormaali jatkuvien funktioiden avaruuden  $C([-\pi, \pi])$  skaalatun sisätulon

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

suhteen. **Koska eri tapauksia on laskutavasta riippuen 6–9, niin riittää tutkia kolme eri tapausta.** Kompleksinen versio olisi hieman helpompi ...

c) Fourier-sarjan idea perustuu seuraavaan tulokseen: Jokaisella  $2\pi$ -jaksollisella  $C^1$ -funktiolla on esitys

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Johda a- ja b-kohtien avulla kaava

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 1.$$

Huom: Tarkoitus on nimenomaan käyttää a- ja b-kohtia eikä laskea kaikkea uudelleen!