

Nimi:

Opiskelijanumero:

Harjoitusryhmä:

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Todistustäydennys 2T

Aihepiiri: Sisätulo ja normi (MC-monisteet, Väisälä luku 1)

Palauta tämä paperi yhdessä tehtävien 2P kanssa seuraavaan tiistaihin klo 12.15 mennessä. Kukin tehtävä arvostellaan asteikolla 0–3. Näitä papereita jaetaan luennolla ja luennoitsijan työhuoneen M227 viereisessä riippukansiossa. Voit myös tulostaa tehtävät MC-sivulta.

1. Täydennä seuraavat päättelyt:

- Kaava $\|(x, y)\| = |x + y|$ ei määrittele normia tason $\mathbf{R}^2$ pisteille (x, y) . Esimerkiksi

ehto $\left(\rule{1cm}{0.4pt} \right)$

ei ole voimassa, koska valitsemalla

$$x = \rule{2cm}{0.4pt}, \quad y = \rule{2cm}{0.4pt}$$

saadaan ristiriita

$\rule{4cm}{0.4pt}$, vaikka $\rule{2cm}{0.4pt}$.

- Kaava $\|f\| = |f(0)|$ ei määrittele normia välillä $[-1, 1]$ jatkuvien funktioiden avaruudessa $C([-1, 1])$. Syy:

Ehto $\left(\rule{1cm}{0.4pt} \right)$

ei ole voimassa, koska valitsemalla

$$f(x) = \rule{4cm}{0.4pt}, \quad x \in [-1, 1],$$

saadaan ristiriita

$\rule{4cm}{0.4pt}$.

Sen sijaan kaksi muuta ehtoa ovat voimassa:

Ehdon $\left(\rule{1cm}{0.4pt} \right)$ perustelu: $\rule{4cm}{0.4pt}$.

Ehdon $\left(\rule{1cm}{0.4pt} \right)$ perustelu: $\rule{4cm}{0.4pt}$.

2. Tässä tehtävässä selvitetään, mikä on vektoriavaruuden $\mathbf{R}^n$ yleisin mahdollinen sisätulo. Jos $x, y \in \mathbf{R}^n$, niin merkitään

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \text{tavallinen euklidinen sisätulo,} \\ \langle x, y \rangle &= \text{jokin toinen sisätulo.} \end{aligned}$$

- Olkoot $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ standardikannan yksikkövektorit ja merkitään $a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$, jolloin sisätulon ehdon (S1) perusteella

$$a_{ji} = \underline{\hspace{10em}}$$

kaikilla $1 \leq i, j \leq n$. Tästä seuraa, että matriisi $A = [a_{ij}]$ on

$$\underline{\hspace{10em}} \quad n \times n\text{-matriisi.}$$

- Kun kirjoitetaan $x = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$, $y = \sum_j y_j \mathbf{e}_j$, niin sisätulon ehtoja (S1)–(S3) käyttämällä saadaan

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n \underline{\hspace{10em}} = \sum_{i,j=1}^n \underline{\hspace{10em}}.$$

Matriisilaskennan merkinnöillä tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\langle x, y \rangle = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y},$$

kun $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat x ja y pystyvektoreiksi tulkittuina.

- Ehdosta (S4) seuraa, että

$$\underline{\hspace{10em}} = \underline{\hspace{10em}} \geq 0$$

kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, joten matriisi A on

$$\underline{\hspace{10em}} \quad \text{semi-}\underline{\hspace{10em}}.$$

- Lopuksi ehdosta (S5) seuraa, että

$$\underline{\hspace{10em}} > 0$$

kaikilla $\mathbf{x} \neq \bar{0}$, joten matriisi A on (edellistä vahvempi ehto)

$$\underline{\hspace{10em}} \quad \underline{\hspace{10em}}.$$

- Yhteenveto: Yleisin mahdollinen avaruuden $\mathbf{R}^n$ sisätulo on muotoa

$$\langle x, y \rangle = \underline{\hspace{10em}},$$

kun $n \times n$ -matriisi A toteuttaa tehtävässä johdetut ehdot.

- Tämän sisätulon indusoimassa normissa yksikköympyrä ($n = 2$) $\|x\| = 1$ on muodoltaan

$$\underline{\hspace{10em}}$$

ja yksikköpallo ($n = 3$) $\|x\| = 1$ on muodoltaan

$$\underline{\hspace{10em}}.$$