Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Harjoitukset, Viikko 5, 2018

H

Tehtävätyypeistä: Johdantotehtävät ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät tarkastetaan vertaisarviointina seuraavalla harjoituskierroksella ellei toisin mainita.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Etsi seuraaville funktioille f ne pisteet, joissa $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$, ja tutki lokaalin ääriarvon esiintymistä:

a) $y^4 + x^2 - 2xy$, b) $x^3 + xy + y^2 - 3x - 9y$, c) $x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2$.

TEHTÄVÄ J2 Etsi seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetussa joukossa:

a) $xy + x - y$, $\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x + y + 1 \ge 0,\ x - y - 1 \le 0 \}$;
b) $x^2 - 2y^2 - xy - x$, $\{ (x,y) \mid x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1 \}$;
c) $3 + x - x^2 - y^2$, $\{ (x,y) \mid 2x^2 + y^2 \le 1 \}$.

Ratkaisu: a) $1, -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$; b) $\frac{17}{8}, -4$; c) $\frac{13}{4}$.

TEHTÄVÄ V1 Määritä funktion

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)/2}$$

lokaalit ääriarvokohdat, näiden laatu sekä ääriarvot.
Ratkaisu: Suhteellinen maksimi $f(\pm\sqrt{2}, 0) = 2/e$, suhteellinen minimi $f(0, \pm\sqrt{2}) = -2/e$.

TEHTÄVÄ V2 Osoita, että reaalilukujoukon

$$\{ xye^{-x^2y} \mid x \ge 0,\ 0 \le y \le 1 \}$$

maksimi on olemassa ja määritä se.
Ratkaisu: Maksimi on $1/\sqrt{2e}$ pisteessä $(1/\sqrt{2}, 1)$.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Etsi origon lyhin etäisyys hyperbelistä $x^2+8xy+7y^2=45$ käyttäen Lagrangen kertoimia.
Ratkaisu: $\sqrt{5}$.

TEHTÄVÄ J2 Määritä origon suurin ja pienin etäisyys käyrästä

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=1.$$

Ratkaisu: $(a>0, b>0)$ $\sqrt[4]{a^2+b^2}$, $\min\{a,b\}$.

TEHTÄVÄ V1 Halutaan rakentaa suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko, jonka tilavuus a^3 on annettu. Laatikon pohja ja sivuseinät ovat puuta ja kansi lasia. Kuinka särmien pituudet on valittava, jotta hinta olisi mahdollisimman alhainen, kun lasi on kaksi kertaa niin kallista kuin puu?
Ratkaisu: Pohjasärmät $\frac{1}{3}\sqrt[3]{18}a$, korkeus $\frac{1}{2}\sqrt[3]{18}a$.

TEHTÄVÄ V2 Määritä funktion $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ suurin ja pienin arvo tason $x+y+z=3$ ja pallon $x^2+y^2+z^2=27$ leikkausympyrällä.
Ratkaisu: Maksimi 123, minimi 27.

Haaste

Tässä tehtävässä gradienttia ∇f käsitellään pystyvektorina. Yksittäisen osittaisderivaatan arvo kuten $f_x(x_0,y_0)$ riippuu (yleensä) koordinaatiston valinnasta. Osoita, että gradientti ∇f on koordinaatistosta riippumaton suure seuraavassa mielessä ($n=2$): Olkoon A ortogonaalinen 2×2-matriisi, ts. $A^TA=I$ (eli kierto, jos lisäksi $\det A=+1$) ja

$$F(\mathbf{x})=f(A\mathbf{x})=f(a_{11}x+a_{12}y, a_{21}x+a_{22}y).$$

Tällöin

$$A\nabla F(\mathbf{x})=\nabla f(A\mathbf{x}).$$

Vihje: Aloita laskemalla F_x ja F_y. Huomaa lisäksi, että oikealla puolella lasketaan vektorin ∇f arvo pisteessä Ax.
Huom: Vastaava päättely toimii tietysti kaikissa dimensioissa.