Vektoriavaruus (vector space)

Reaalinen vektoriavaruus on joukko E, jossa on määritelty

- kahden vektorin[2] summa: $u + v \in E$, kun $u, v \in E$, ja
- vektorin kertominen skalaarilla: $cv \in E$, kun $v \in E$ ja $c \in \mathbf{R}$

Lisäksi vaaditaan, että

- on olemassa nollavektori $\overline{0} \in E$, jolle $\overline{0} + v = v$ kaikille $v \in E$
- jokaisella $v \in E$ on vastavektori $-v \in E$, jolle $v + (-v) = \overline{0}$
- $1v = v$ kaikille $v \in E$.
- "kaikki tavalliset" laskusäännöt eli vaihdanta-, liitäntä- ja osittelulait ovat voimassa.

Aiheesta lisää kurssilla MS-C1340. Katso myös
`https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space`

[2] Joukon E alkioita kutsutaan tässä yhteydessä **vektoreiksi**

OSAJOUKKO $F \subset E$ ON <u>VEKTORIALIAVARUUS</u>, JOS

(1) $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$

(2) $x \in F,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx \in F$

(3) $\overline{0} \in F$ (TAI: $F \neq \emptyset$)

<u>ESIM.</u> (VRT. DI. 36)

$$C[a,b] = C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ON JATKUVA} \}$$

ON AVARUUDEN $F([a,b], \mathbb{R})$ ALIAVARUUS.

$\uparrow$ KAIKKI FUNKTIOT $[a,b] \to \mathbb{R}$

Schwarzin epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö

Lause 4.4

Sisätuloavaruudessa E pätee

- *Schwarzin epäyhtälö:* $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$
- *Kolmioepäyhtälö:* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

kaikille $x, y \in E$.

Lisäksi

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= (x-y)\cdot(x-y) = x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x\cdot y,\end{aligned}$$

joten

$$x\cdot y = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Sisätulo voidaan siis laskea pelkästään vektoreiden pituuksien avulla.

TOD. SCHWARZ: OLKOON $x, y \in E$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow 0 \leq \|x+ty\|^2 = \langle x+ty, x+ty\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + t\langle y, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2 =: f(t)$$

JOS $y = \bar{0}$, NIIN VÄITE SELVÄ.

JOS $y \neq \bar{0}$, NIIN $f(t)$ ON 2. ASTEEN POLYNOMI, JONKA DISKRIMINANTTI ≤ 0 (KOSKA $f(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow (2\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\langle x, y\rangle)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \square$$

KOLMIOEPÄYHTÄLÖN TOD. OL. $x, y \in E$.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

↑ SCHWARZ

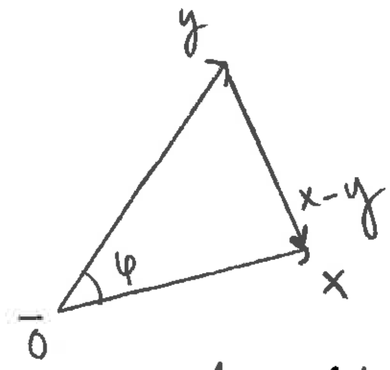
$$= \left(\|x\| + \|y\| \right)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| . \square$$

Kulma $x, y \in E \Rightarrow (x-y)\cdot(x-y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x\cdot y$

$$\Rightarrow x\cdot y = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

riippuu vain vektorien pituuksista!



$\Rightarrow$ sama kaava toimii E:ssä ja $\mathbb{R}^2$:ssa

E:n taso, joka sisältää $\bar{0}, x, y$

Schwarz: $|x\cdot y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

$$\Rightarrow \frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|} \in [-1, 1]$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}\right) \in [0, \pi]$$

VRT. korrelaatio:

$$r_{xy} = \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_k (x_k - \bar{x})^2 \cdot \sum_k (y_k - \bar{y})^2}}$$

(KTS WIKIPEDIA TMS)

$$r_{xy} \approx 1 \Leftrightarrow \cos\varphi \approx 1 \approx \varphi \approx 0$$

$$\begin{cases} x_k \mapsto x_k - \bar{x} \\ y_k \mapsto y_k - \bar{y} \end{cases}$$

ORIGON SIIRTO KOHTAAN $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$

Kompleksinen sisätulo (oheislukemista)

Kompleksisessa vektoriavaruudessa E vektoreita $v \in E$ voidaan kertoa myös kompleksiluvuilla $c \in \mathbf{C}$.

- Kompleksisen sisätulon määritelmässä ehto (S1) muuttuu muotoon $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Muut ehdot säilyvät ennallaan.
- Muutoksen seurauksena (vai syynä?) yksinkertaisimmassa esimerkissä $\mathbf{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_k \in \mathbf{C}$ kaikilla $1 \le k \le n\}$ kaavalla

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 + \dots + z_n\overline{w}_n = \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w}_k$$

määritelty operaatio toteuttaa ehdot (S4) ja (S5).
- Tästä seuraa kuitenkin, että $\langle x, ay\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle$, kun $a \in \mathbf{C}$.

Kompleksisen sisätulon sovelluksia esiintyy mm. Fourier-analyysissä ja kvanttimekaniikassa.

KVANTTIMEKANIIKASSA MERK. $\langle x | y\rangle = \langle x, y\rangle$

$$\langle x, ay\rangle = \overline{\langle ay, x\rangle} = \overline{a\langle y, x\rangle}$$
$$= \bar{a}\,\overline{\langle y, x\rangle} = \bar{a}\langle x, y\rangle.$$

$\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy = z$:N LIITTOLUKU

Kolme tärkeää esimerkkiä I

- Euklidinen avaruus $\mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathbf{R}$ kaikilla $k = 1, \ldots, n$:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

- Jonoavaruus
$\ell^2 = \{(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \mid x_k \in \mathbf{R}$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

- Jatkuvien funktioiden avaruus (C = continuous)
$C([a,b]) = C([a,b], \mathbf{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \mid f$ on jatkuva$\}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

SCHWARZ:

$$\mathbb{R}^m: \sum_{k=1}^{m} x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^2 \right)^{1/2}$$

$$C([a,b]): \int_a^b f(x) g(x)\, dx \le \left(\int_a^b f(x)^2\, dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g(x)^2\, dx \right)^{1/2}$$

NORMIT:

$$\mathbb{R}^m: \quad \|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$$

STANDARDIKANTA $\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{e}_m = (0, 0, \ldots, 0, 1)$

TOTEUTTAA $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, $\quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{e}_k$

$$C([a,b]): \|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2\, dx \right)^{1/2}$$

Normiavaruus (normed space)

Määritelmä 4.6

Vektoriavaruuden E kuvaus $E \to [0, \infty[$, jossa $x \mapsto \|x\|$, on **normi** (norm), jos

(N1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikilla $x, y \in E$ (kolmioepäyhtälö)

(N2) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ kaikilla $x \in E$, $c \in \mathbf{R}$

(N3) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$

Tulkinta: $\|x\|$ = vektorin x pituus.
Tyypillinen esimerkki: Sisätulon määräämä normi.

- Kolmioepäyhtälöstä seuraa myös käänteinen epäyhtälö

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x+y\|$$

kaikilla $x, y \in E$.

TOD. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ SISÄTULOAVARUUDESSA E

(N1) OLI JO AIKAISEMMIN (KOLMIOEPÄYHTÄLÖ)

(N2) $\|cx\|^2 = \langle cx, cx \rangle = c^2 \langle x, x \rangle = c^2 \|x\|^2$

$\Rightarrow \|cx\| = |c| \cdot \|x\|.$

(N3) SEURAA EHDOSTA (S5). $\square$

Esimerkkejä normiavaruuksista I

Esimerkki 4.7

Joukossa $\mathbf{R}^n$ voidaan määritellä myös normit

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k| \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Ominaisuuksien (N1)–(N3) todistukset ovat melko suoraviivaisia (luennot/harjoitukset).

Nämä yleistyvät myös tiettyjen jonoavaruuksien vastaaviksi normeiksi, kunhan huolehditaan siitä, että lausekkeet pysyvät äärellisinä ja jälkimmäisessä max → sup.

TOD. $\|x\|_\infty$ ON NORMI. OL. $x, y \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$.

(N1) $|(x+y)_k| = |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$

$\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \quad \forall\, k = 1, \ldots, m$

$\Rightarrow \|x+y\|_\infty = \max_k |(x+y)_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$

(N2) VALITAAN SELLAINEN k, ETTÄ $\|x\|_\infty = |x_k|$

$\Rightarrow |(cx)_k| = |cx_k| = |c| \cdot |x_k| = |c| \cdot \|x\|_\infty$

$\Rightarrow \|cx\|_\infty \geq |c| \cdot \|x\|_\infty$

TOISAALTA $|cx_j| = \ldots \leq |c| \cdot \|x\|_\infty \quad \forall\, j = 1, \ldots, m$

$\Rightarrow \|cx\|_\infty \leq |c| \cdot \|x\|_\infty$

$\Rightarrow$ VÄITE.

(N3) $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_k |x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0 \quad \forall\, k = 1, \ldots, m$

$\Leftrightarrow x_k = 0 \;\forall\, k \Leftrightarrow x = \overline{0} \qquad \square$

Esimerkkejä normiavaruuksista III

Myös funktioavaruuksissa on erilaisia normeja:

Esimerkki 4.8

Jatkuvien funktioiden joukossa $C([a,b])$ voidaan käyttää myös normeja

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid a \le x \le b\}.$$

Näitäkään ei saada minkään sisätulon avulla. Molemmissa kaavoissa funktion f jatkuvuus takaa sen, että lausekkeet ovat määriteltyjä ja äärellisiä.

TODISTETAAN (N1) NORMILLE $\|f\|_\infty$:

OLKOON $x \in [a,b]$

$$\Rightarrow |(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$$

$$\le \underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\text{SAMA YLÄRAJA } \forall x} \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_\infty = \max_x |f(x)+g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \quad \square$$