

MS-A0002 Matriisilaskenta

2. Lineaarinen yhtälöryhmä matriiseilla

Joni Virta, ©Riikka Kangaslampi

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tarkastellaan esimerkkinä lineaarista yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Matriisimuodossa tämä kirjoitetaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ eli}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tulkinta 1: kumpikin yhtälöparin yhtälö kuvaa suoraa tasossa $\mathbb{R}^2$, ja mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ on suorien leikkauspiste.

Tulkinta 2: matriisi A määrittelee *kuvauksen* (= funktion) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Halutaan löytää piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, jolle $A\mathbf{x} = (1, 5)$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Yleisesti: Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä annettuina ovat $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, ja halutaan ratkaista $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tulkinta 1: kukin rivi $a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$ ($1 \leq k \leq m$) on yhtälö *hypertasolle* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. (Suora, kun $n = 2$; taso, kun $n = 3$.) Mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on kaikille hypertasoille (m kpl) yhteinen piste.

Tulkinta 2: Matriisi A määrittelee kuvauksen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Etsitään pistettä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, joka kuvautuu pisteeksi $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Esimerkki 1

Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Määritellään kuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllä $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ts.

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

- a) Etsi pisteen $\mathbf{u} = (2, -1)$ kuva $T(\mathbf{u})$.
- b) Etsi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että $T(\mathbf{x}) = (3, 2, -5)$.
- c) Löytyykö b-kohdassa useampia ratkaisuja?
- d) Löytyykö pistettä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että $T(\mathbf{x}) = (3, 2, 5)$?

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Tarkastellaan hieman laajempaa esimerkkiä. On annettu kolme $\mathbb{R}^3$:n vektoria:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Etsitään vektorin $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ esitys vektoreiden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ avulla.

Tarkasteltavana on siis yhtälö

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b},$$

missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ovat tuntemattomia, jotka on tarkoitus ratkaista, jos mahdollista.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Kirjoitetaan tämä yhtälöryhmäksi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases}$$

Etsitään siis toisaalta kolmen tason leikkauspisteitä.

Sama matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Siis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Mitä tiedämme ratkaisujen lukumäärästä?

Ratkaisuja voi olla

- 1 0 kpl: Tasot eivät leikkaa, eli A ei kuvaa mitään vektoria $\mathbf{b}$:lle.
- 2 1 kpl: Tasot leikkaavat yhdessä pisteessä, eli $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ on kanta.
- 3 ∞ kpl: Tasot leikkaavat pitkin suoraa/tasoa, eli " A :n ydin on ei-triviaali".

Hyödyllinen käsite on A :n kuva-avaruus $\mathcal{R}(A)$, jonka alkiot ovat kaikki vektoreiden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ lineaarikombinaatiot. Jos ratkaisua ei ole olemassa, tulkitaan, että $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(A)$.

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Esimerkki 2

Tarkastellaan yhtälöryhmän eri tulkintoja seuraavissa kahdessa tapauksessa.

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Perinteisesti yhtälöryhmät ratkaistaan lisäämällä ja vähentämällä yhtälöitä toisistaan, jollakin kertoimilla painotettuina.

Matriisimuodossa vastaavat operaatiot voidaan tehdä yksinkertaisemmin merkinnöin.

Kirjoitetaan matriisiyhtälö *liittomatriisiksi*

$$[A \mid \mathbf{b}] \quad \text{eli} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] .$$

Suoritetaan sitten ratkaisu *Gaussin algoritmilla*:

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 7 \end{cases} \quad eli \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 11 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 2 \\ \leftarrow + \end{array} \right]^{-3} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 8x_2 + 14x_3 = 8 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \quad eli \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 14 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right]^{-3} \\ | :2 \quad -14 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -5 \\ 8x_2 = -20 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad eli \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 8 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ | :8 \end{array} \right]^{-2} \end{array}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 &= & 0 \\ x_2 &= & -5/2 \\ x_3 &= & 2 \end{cases} \quad eli \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Ratkaisu on siis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, -5/2, 2)$.
(Tarkista sijoittamalla!)

Tämä piste on alkuperäisten tasojen ainoa leikkauspiste. Se on myös piste/vektori, jonka matriisi A kuvaa pisteeksi/vektoriksi $\mathbf{b}$. Toisaalta, nämä kertoimet ovat vektorin $\mathbf{b}$ koordinaatit, kun se ilmoitetaan kannassa $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, eli $0 \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{5}{2}\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

2.2 Gaussin eliminaatio

Gaussin eliminaatiomenetelmässä lineaarinen matriisiyhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kirjoitetaan liittomatriisina $[A \mid \mathbf{b}]$, jota muokataan *rivioperaatioin*:

- 1 lisämällä (painotettu) rivi toiseen riviin
— vastaa (painotetun) yhtälön lisäämistä toiseen
- 2 vaihtamalla kahden rivin paikkaa keskenään
— vastaa yhtälöiden paikan vaihtoa
- 3 kertomalla yksittäinen rivi vakiolla $c \neq 0$
— vastaa yhden yhtälön kertomista vakiolla $c \neq 0$

Jos lineaarisesta yhtälöstä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saadaan rivioperaatioin $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, merkitään

$$[A \mid \mathbf{b}] \sim [C \mid \mathbf{d}].$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 3

Etsi Gaussin eliminaatiomenetelmällä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

ratkaisu.

Vastaus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 4

Allaolevassa taulukossa on annettuna neljän planeetan keskimääräiset etäisyydet auringosta (astronomisissa yksiköissä) ja niiden kiertoaajat auringon ympäri (vuosissa).

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars
Etäisyys	0.387	0.723	1.000	1.524
Kiertoaika	0.241	0.615	1.000	1.881

Sovita kolmen ensimmäisen planeetan avulla toisen asteen polynomi, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, etäisyyden ja kiertoaajan välille ja käytä sitä ennustamaan Marsin kiertoaika sen etäisyyden avulla.

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 5

Etsi yhtälöryhmän kaikki ratkaisut, kun

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 14x_4 = 7 \end{cases} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ratkaisu: Kirjoitetaan yhtälö matriisimuotoon $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Ennen kuin sijoitamme liittomatriisiin oikealle puolelle vektorin

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ suoritetaan eliminaatioaskeleet yleisellä } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & b_2 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & b_3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \text{---} -2 \end{array} \right] -3 \\ \leftarrow + \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \text{---} -1 \end{array} \right] \\ \leftarrow + \end{array}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

Jotta viimeiselle riville ei syntyisi ristiriitaa, on pädeävä
 $b_3 - b_2 - b_1 = 0$. Tämä on *konsistenssiehto*.

Annetulla vektorilla $7 - 6 - 1 = 0$, joten ristiriitaa ei synny.

2.2 Gaussin eliminaatio

Palataan sitten annettuun vektoriin **b**, jolloin saadaan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7-6-1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ | :2 \end{array} \begin{array}{l} \\ -3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Matriisi A on nyt saatettu *redusoituun porrasmuotoon*. Tämä tarkoittaa muotoa, jossa jokaisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on 1 ja alemmalla rivillä on alussa nollia aina useampi kuin ylemmällä.

2.2 Gaussin eliminaatio

Jaetaan muuttujat

- a) kiinnitetyiksi (x_1, x_3)
- b) vapaiksi (x_2, x_4)

Miksi nämä nimet?

Vapaat voi korvata parametreilla ja ratkaista kiinnitetyt niiden avulla.

Olkoon $x_2 = \sigma$, $x_4 = \tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Ratkaistavana on siis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma \\ x_3 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Helpoiten loppu onnistuu kirjoittamalla ongelma takaisin yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} x_1 + 2\sigma + \tau = -5 \\ x_3 + \tau = 2 \end{cases}.$$

Tästä saadaan ratkaistua kiinnitetyt muuttujat x_1 ja x_3 vapaiden avulla:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2\sigma - \tau \\ x_3 = 2 - \tau \end{cases}.$$

Kun lisäksi muistetaan, että $x_2 = \sigma$ ja $x_4 = \tau$ ovat mielivaltaisia reaalityypisiä, nähdään, että yhtälöt ratkeavat millä tahansa lukunelillä x_1, x_2, x_3, x_4 , joka on muotoa

2.2 Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2\sigma - \tau \\ x_2 = \sigma \\ x_3 = 2 - \tau \\ x_4 = \tau \end{cases},$$

missä $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Toisin sanoen, kaikki muotoa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{R},$$

olevat vektorit toteuttavat siis alkuperäisen yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli ratkaisuita on ääretön määrä.

2.2 Gaussin eliminaatio

Huom. Vapaiden muuttujien kerroinvektorit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ratkaisevat yhtälön $A\mathbf{x} = 0$, eli samaa matriisia vastaavan homogeenisen yhtälön. Myös kaikki niiden lineaarikombinaatiot ratkaisevat homogeenisen yhtälön.

Sanotaankin, että matriisin A ydin on yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = 0$ ratkaisuiden kantavektorien joukko, eli tässä tapauksessa

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 6

Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

kaikki ratkaisut.

Vastaus: $\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$

2.2 Gaussin eliminaatio

Lause 7

Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä A on $m \times n$ -matriisi, voidaan aina saattaa muotoon

$$\left(\begin{array}{cc|c} I & F & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \end{array} \right),$$

missä I on $r \times r$ -identiteettimatriisi, F on $r \times (n - r)$ -matriisi, c_1 on r -vektori ja c_2 on $(m - r)$ -vektori.

Ratkaisuiden lukumäärälle saadaan ehdot: Jos

$$\begin{cases} r < m \text{ ja } c_2 \neq 0 & \text{lukumäärä on } 0 \\ (r = m \text{ tai } c_2 = 0) \text{ ja } r = n & \text{lukumäärä on } 1 \\ (r = m \text{ tai } c_2 = 0) \text{ ja } r < n & \text{lukumäärä on } \infty \end{cases}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 8

Eräs yksinkertainen talous koostuu hiili-, sähkö- ja terässektoreista. Sähkösektorin tuotannosta myydään 40% hiilisektorin käyttöön, 50% terässektorin käyttöön ja loput jää omaan käyttöön.

Hiilisektorin tuotannosta sähköteollisuus ostaa 60% ja terästeollisuus 40%. Terässektorin tuotannosta puolestaan 60% myydään hiilisektorin käyttöön, 20% sähkösektorille ja loput omaan käyttöön.

Merkitään sähkösektorin vuosituotannon arvoa p_s , hiilisektorin p_h ja terässektorin p_t . Etsi tasapainotila, jossa kunkin sektorin tulot ja menot vastaavat toisiaan.

2.2 Gaussin eliminaatio

Ratkaisu: Tasapainotilassa hiilisektorin vuosituotannon arvo p_h on yhtä suuri kuin sen menot. Menot koostuvat siitä, että ostetaan 40% sähkösektorin tuotannosta ja 60% terässektorin tuotannosta. Siis:

$$p_h = 0.40p_s + 0.60p_t.$$

Vastaavasti sähkö- ja terässektoreille:

$$p_s = 0.60p_h + 0.20p_t + 0.10p_s$$

$$p_t = 0.50p_s + 0.40p_h + 0.20p_t.$$

(Huomaa, että näillä sektoreilla osa tuotannosta menee omaan käyttöön!) Saadaan siis yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} p_h - 0.40p_s - 0.60p_t = 0 \\ -0.60p_h + 0.90p_s - 0.20p_t = 0 \\ -0.40p_h - 0.50p_s + 0.80p_t = 0 \end{cases}$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Kirjoitetaan tämä matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.40 & -0.60 \\ -0.60 & 0.90 & -0.20 \\ -0.40 & -0.50 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_h \\ p_s \\ p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaussin eliminaatiolla saadaan (pyöristettynä kahden luvun tarkkuudelle)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.40 & -0.60 & 0 \\ -0.60 & 0.90 & -0.20 & 0 \\ -0.40 & -0.50 & 0.80 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

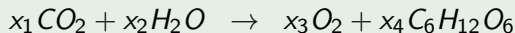
joten yleinen ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} p_h \\ p_s \\ p_t \end{pmatrix} \approx p_t \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Gaussin eliminaatio

Esimerkki 9

Fotosynteesissä kasvi muuttaa auringonvalosta saamallaan energialla hiilidioksidia CO_2 ja vettä H_2O hapeksi O_2 ja glukoosiksi $C_6H_{12}O_6$. Reaktion kemiallinen yhtälö on siis



Etsi kertoimet x_1, x_2, x_3, x_4 .

Vastaus: Hiili-, vety- ja happiatomien lukumäärien täytyy pysyä vakioina, joten yhtälön kummallakin puolella niitä kutakin on sama määrä. Tästä saamme yhtälöryhmän, joka ratkaistaan Gaussin eliminaatiomenetelmällä. Vastaukseksi saadaan $x_1 = x_2 = x_3 = 6\tau$, $x_4 = \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Nämä kalvot perustuvat Riikka Kangaslammen alkuperäisiin, joita ovat myöhemmin muokanneet Mikael Laaksonen ja Joni Virta.