Metrinen avaruus (metric space)

Määritelmä 5.1

Olkoon X joukko ja $d: X \times X \to [0, \infty[$ funktio, joka toteuttaa ehdot

(M1) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ kaikilla $x, y \in X$

(M3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, kun $x, y \in X$.

Tällöin d on **metriikka** (eli etäisyys, metric) joukossa X ja (X, d) on **metrinen avaruus**.

Tyypillinen esimerkki: Normin määräämä metriikka $d(x,y) = \|x-y\|$ normiavaruudessa E.

Joukon X alkioita kutsutaan pisteiksi.

Lause Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Tällöin kaava

$d(x,y) = \|x-y\|$ määrittelee metriikan E:ssä.

(normin indusoima metriikka)

Tod. (M1)
$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \\
&\leq \|x-y\| + \|y-z\| \qquad (N1) \\
&= d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}
$$

(M2)
$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \|x-y\| = \|(-1)\cdot(y-x)\| = |-1|\cdot\|y-x\| \qquad (N2) \\
&= \|y-x\| = d(y,x)
\end{aligned}
$$

(M3)
$$
\begin{aligned}
d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = \bar{0} \qquad (N3) \\
&\Leftrightarrow x = y. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Metrisen avaruuden käsitteitä

Olkoon $a \in X$ keskipiste, $r > 0$ säde:

- avoin kuula $B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$ (open ball)
- suljettu kuula $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$ (closed ball)
- pallo $S(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) = r\}$ (sphere)
- joukon $A \subset X$ läpimitta (diameter)

$$d(A) = \operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$$

- joukkojen $A, B \subset X$ välinen etäisyys (distance)

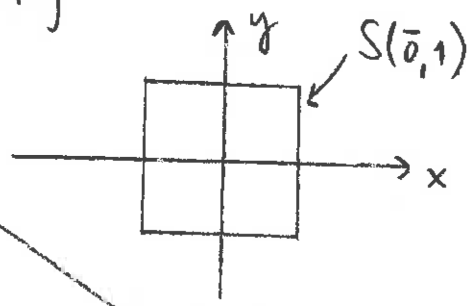
$$d(A,B) = \operatorname{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

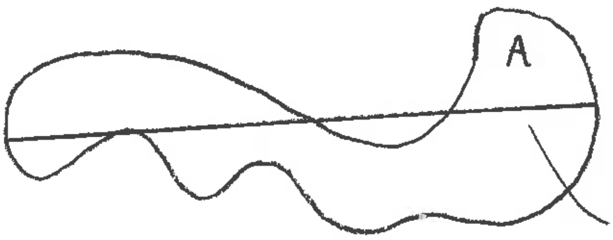
Huom: Jos X ei ole euklidinen normi, niin kuulat ja pallot voivat näyttää "kummallisilta".

Esim. $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|) = \|(x,y)\|_\infty$ on tason $\mathbb{R}^2$ normi.

Tämän indusoiman metriikan

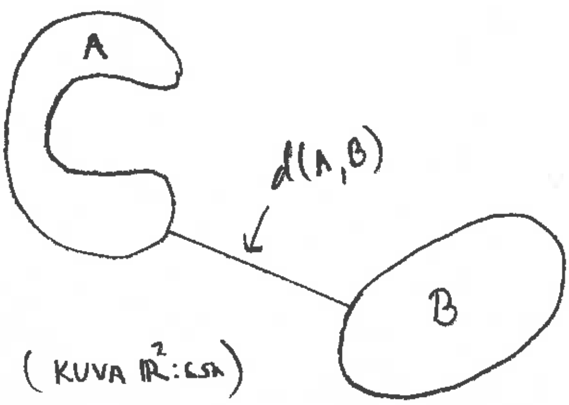
$$S(\bar{0},1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|) = 1\}$$





SUP-

$d(A)$ = JANAN PITUUS, JOS $A \subset \mathbb{R}^n$



(KUVA $\mathbb{R}^2$:SSA)

Huom: $d(A,B) = 0$ on mahdollinen, vaikka $A \cap B = \emptyset$

(ESIM: AVOIMET VÄLIT)