

Nimi:

Opiskelijanumero:

Harjoitusryhmä:

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Todistustäydennys 3T

Aihepiiri: Normi ja metriikka (MC-monisteet, Väisälä luvut 1–2.)

Palauta tämä paperi yhdessä tehtävien 3P kanssa seuraavaan tiistaihin klo 12.15 mennessä. Kukin tehtävä arvostellaan asteikolla 0–3. Näitä papereita jaetaan luennoilla ja luennoitsijan työhuoneen M227 viereisessä riippukansiossa. Voit myös tuostaa tehtävät MC-sivulta.

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että äärelliset joukot

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$$

ovat suljettuja täydentämällä seuraava todistus.

Todistus. Osoitetaan, että $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ on suljettu, joka määritelmän mukaan tarkoittaa sitä, että $X \setminus F$ on

_____.

Olkoon siis $y \in X \setminus F$. Tällöin $y \neq x_k$ kaikilla $k = 1, \dots, n$, joten

$$r_k = d(y, x_k) > \text{_____}.$$

Kun valitaan

$$r = \text{_____} > 0,$$

niin

$$r \text{ _____ } r_k \text{ kaikilla } k = 1, 2, \dots, n.$$

Tällöin

$$B(y, r) \subset \text{_____}.$$

Tästä seuraa, että $X \setminus F$ on avoin. $\square$

2. (Tässä yleistetään tehtävän 3b/1P tulos.)

Täydennä seuraavan n -ulotteisen avaruuden $\mathbf{R}^n$ normeja koskevan tuloksen todistus: Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ja

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

niin

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Todistus. Tarkastellaan kiinteää $x \in \mathbf{R}^n$, koska parametri p on tehtävässä esiintyvä muuttuja. Tavoitteena on osoittaa, että kaikilla $p > 1$ on voimassa

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty. \quad (1)$$

Koska

$$\lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} = \underline{\hspace{2cm}},$$

niin väite seuraa tällöin sta.

(i) Todistetaan vasemmanpuoleinen epäyhtälö (1). Valitaan sellainen indeksi $t \in \{1, \dots, n\}$, että $|x_t| = \|x\|_\infty$. Koska funktio $u \mapsto u^{1/p}$, $u \geq 0$, on kasvava, niin

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= |x_t| = (|x_t|^p)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{n} \|x\|_p^p \right)^{1/p} = \frac{1}{n^{1/p}} \|x\|_p \end{aligned}$$

ja vasen epäyhtälö (1) on todistettu.

(ii) Todistetaan oikeanpuoleinen epäyhtälö (1). Valitaan indeksi t kuten yllä. Koska funktio $u \mapsto u^p$, $u \geq 0$, on kasvava, niin kaikilla indekseillä $k = 1, \dots, n$ pätee $|x_k|^p \leq |x_t|^p$, joten

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \leq \left(\frac{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}{n} \right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{n^{1/p}} \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \right)^{1/p} = \frac{1}{n^{1/p}} \|x\|_p, \end{aligned}$$

joten toinenkin epäyhtälö (1) on todistettu. $\square$