Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Laskuharjoitus 3P viikolla 4 (23.–25.1.)
Aihepiiri: Normi ja metriikka (MC-monisteet, Väisälä luvut 1–2)

Tehtävät 3 ja 4 on tarkoitus laskea ennen omaa harjoitusryhmää ja lasketut tehtävät merkitään listaan. Assitentti valitsee yhden (tai useamman, jos a-b-...-kohtia) opiskelijan esittämään jomman kumman (satunnaisesti valitun!) tehtävän taululla, ja esittää itse toisen tehtävän ratkaisun.

Loppuajan voi käyttää palautettavien tehtävien laskemiseen. Ne palautetaan kirjallisesti laskutupaa Y190c vastapäätä olevaan lokerikkoon seuraavaan tiistaihin klo 12.15 mennessä. Myös todistustäydennysten 3T palautuksen takaraja on sama.

3. a) Osoita, että sisätuloavaruuden normille on voimassa *suunnikassääntö*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

b) Osoita a-kohdan avulla, ettei tehtävän 6/2P normi

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|, \ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

määräydy vektoriavaruuden $\mathbf{R}^2$ minkään sisätulon avulla.
Vihje: Jos a-kohdan kaava ei päde joillekin vektoreille $x, y \in \mathbf{R}^2$, niin ...

4. a) Osoita, että kaavalla

$$d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$$

määritelty funktio on metriikka joukossa $\mathbf{R}$.
b) Olkoot $A = [0, 1]$ ja $B =]5, 10]$. Määritä läpimitta $d(A)$ ja joukkojen välinen etäisyys $d(A, B)$, kun käytetään a-kohdan metriikkaa. (Intuitiivinen perustelu riittää.)

5. Tehtävässä 2/3T verrataan toisiinsa normeja $\|x\|_\infty$ ja $\|x\|_p$. Tässä tehtävässä verrataan avaruuden $\mathbf{R}^n$ pistetulon määräämää normia

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$$

tehtävän 6/2P normiin $\|x\|_1$.
a) Osoita, että

$$\|x\| \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|.$$

Vihjeitä (Väisälän kirjasta): Ensimmäinen epäyhtälö: Kirjoita $x = \sum x_j e_j$.
2. ey: Sovella Schwarzin epäyhtälöä vektoreihin $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ ja $(1, 1, \ldots, 1)$.
b) Anna konkreettinen esimerkki vektorista $x \neq \overline{0}$, jolle jälkimmäisessä pätee yhtäsuuruus. Tästä seuraa, että kerroin $\sqrt{n}$ on pienin mahdollinen.

6. a) Olkoon X joukko ja $A_j \subset X$ kaikilla $j \in J$. Todista de Morganin lait

$$X \setminus \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j) \quad \text{ja} \quad X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j).$$

Vihje: Usein kahden joukon yhtäsuuruus $A = B$ täytyy todistaa kahdessa osassa: $A \subset B$ ja $B \subset A$. Tässä tehtävässä nämä kohdat voi yhdistää todistamalla suoraan $x \in A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in B$.
Joukon $A \subset X$ komplementin $X \setminus A$ määritelmä:

$$x \in X \setminus A \Leftrightarrow x \in X \text{ ja } x \notin A \Leftrightarrow x \notin A,$$

sillä usein taustalla olevaa joukkoa X ei mainita erikseen.
b) Luennolla ma 21.1. todistettiin avoimien joukkojen perusominaisuudet. Todista a-kohdan avulla, että suljettujen joukkojen leikkaukset ja äärelliset yhdisteet ovat suljettuja (eli luentokalvon 51 lauseen 5.5 kaksi viimeistä kohtaa).
Vihjeenä ensimmäisen todistuksen alku: Olkoot $F_j \subset X$ suljettuja joukkoja, kun $j \in J =$ jokin indeksijoukko.

7. Tässä tehtävässä käytetään tason pisteille merkintää $z = (x, y)$.
Laske ympyränkaaren

$$S = \{z = (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

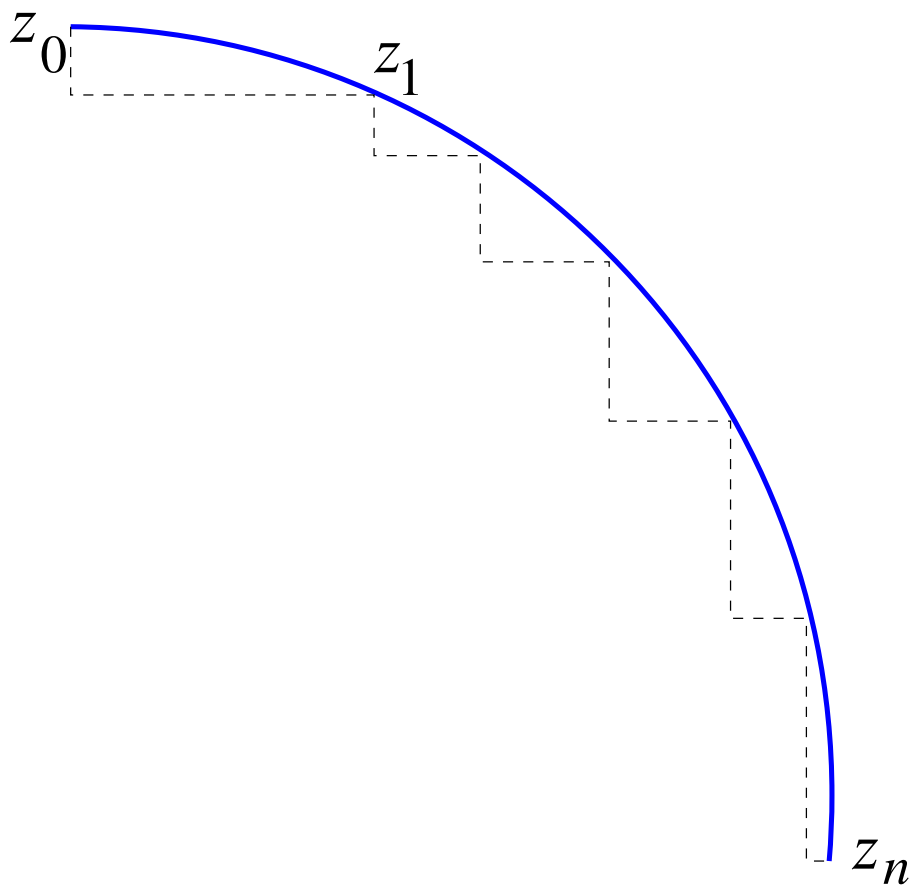
läpimitta $d(S) = \operatorname{diam}(S)$ ja kaarenpituus $\ell(S)$ metriikassa

$$d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_1.$$

Vertaa vastauksia euklidisen metriikan avulla laskettuihin tuloksiin.
Vihje: Kaarenpituus määritellään kaavalla

$$\ell = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} d(z_{k-1}, z_k) \quad \middle| \quad \text{pisteet } z_k,\ 0 \leq k \leq n, \right.$$
$$\left. \text{sijaitsevat peräkkäin kaarella } S \right\}.$$

Kolmannen sivun kuvio liittyy kaarenpituuden laskemiseen tässä metriikassa, mutta kannattaa miettiä ensin itse ennen kuin katsot siitä vihjeen.


z_0
z_1
z_n